GIUSTO O SBAGLIATO? QUESTO È IL PROBLEMA

M. Dedò, L. Sferch

Pubblicato originariamente, col titolo "*Right or Wrong? That is the Question*", in *Notices of the Amer. Math. Soc.* , vol. **59**, n.ro 7 (Agosto 2012), pagg. 924-932 (http://www.ams.org/notices/201207/rtx120700924p.pdf).

Sunto

In questo articolo presentiamo un'analisi – supportata dai risultati di sperimentazioni svolte nel corso degli ultimi 10 anni – degli atteggiamenti, delle percezioni e dei comportamenti riguardanti l'errore in un contesto matematico, e, più in generale, del ruolo svolto dall'errore nel processo di apprendimento/insegnamento. Sosteniamo che l'errore dovrebbe essere preso molto più in considerazione durante la fase di apprendimento/insegnamento come un elemento cruciale, che ci permette di seguire l'evoluzione del pensiero man mano che si imparano nuovi concetti. Questa attenzione agli errori dovrebbe essere tradotta in pratiche che rendano possibile modificare i comportamenti che producono errori, e portare quindi a una maggiore consapevolezza da parte degli studenti sui loro processi di ragionamento. Viceversa, sosteniamo che nella fase di valutazione il ruolo giocato dagli errori dovrebbe essere molto limitato.

Questa riflessione nasce dalla constatazione che spesso l'errore viene trattato in maniera paradossale: se ne parla tutti i momenti, ma non si sa analizzarlo; si dice che è utile e prezioso, ma lo si usa in negativo nelle valutazioni; si esortano gli studenti a esplicitarlo, e nello stesso tempo si nascondono i propri.

Ciò che sosteniamo, e che in questo articolo vogliamo argomentare e supportare di esempi, è che gli errori sono preziosi alleati che ci portano a capire alcuni elementi riguardanti le modalità di ragionamento; questi elementi tuttavia restano nascosti e quindi non ci aiutano nel processo di apprendimento/insegnamento se abbiamo la brutta abitudine di cancellare gli errori, e soprattutto se poi trasmettiamo questa abitudine ai nostri studenti. L'altra faccia di questa medaglia è che l'errore, prezioso alleato nel momento dell'apprendimento, è invece un elemento poco rilevante ai fini della valutazione: in alcuni casi non ci sono particolari errori, ma il contesto è tale che la situazione dovrebbe essere valutata negativamente e viceversa in altri casi potrebbero esserci anche situazioni con parecchi errori che lasciano però intendere un reale apprendimento e quindi dovrebbero essere valutate in maniera positiva.

Arriviamo ora a scrivere questo articolo – e non lo abbiamo fatto dieci anni fa, anche se su un piano teorico avevamo già tutti gli elementi per farlo – perché possiamo ora basare le nostre affermazioni su un lungo lavoro di sperimentazione nella scuola, in forma diretta da parte del secondo autore[1], in forma indiretta da parte del primo autore, attraverso le attività proposte alle scuole dal Centro "*matematita*"[2]. Ciò spiega anche i frequenti riferimenti che ci saranno nel testo a tali attività, che hanno negli anni fornito supporto di sperimentazione su cui sono state testate le affermazioni che andremo qui a fare.

1 Laura Sferch ha lavorato sistematicamente con gli errori nelle sue classi negli ultimi 10 anni, coinvolgendo quindi circa 500 studenti.

2 "*matematita*" è un Centro di Ricerca Interuniversitario per la Comunicazione e l'Apprendimento Informale della Matematica: vedi http://www.matematita.it/. Per sperimentare le sue proposte il Centro porta avanti numerose attività rivolte agli studenti preuniversitari. Dalla sua costituzione (sette anni fa), le attività di laboratori tenute presso il Dipartimento hanno coinvolto circa 5000 studenti, e molti di più sono stati coinvolti dalle attività online o dalle visite alle diverse mostre allestite dal Centro in varie città italiane. Vedi http://www.matematita.it.

Che cos'è l'errore

Es irrt der Mensch, so lang er strebt (Goethe)[3]

In tanti anni di insegnamento l'errore è l'elemento naturale con il quale abbiamo costantemente a che fare e non solo gli errori dei nostri studenti, dato che sappiamo benissimo che tutti noi sbagliamo. Particolare non irrilevante, mentre tutti parliamo di errori più o meno gravi, non è affatto scontato che siamo d'accordo su ciò che siamo disposti ad ammettere come "universalmente grave" e, fatto ancora più imbarazzante, spesso ciò che noi stessi consideriamo grave o meno si modifica nel tempo.

In effetti, giudicare "grave" un errore, o, prima ancora, individuare un errore in una frase in cui si parla di matematica significa spesso compiere una valutazione che riguarda il rigore (l'assenza di rigore o l'insufficienza di rigore) in quella data frase. Ma il problema è che il "rigore" matematico è ben lungi dall'essere rigore assoluto (e questo non solo nei compiti dei nostri studenti, a qualunque livello di scolarità, ma addirittura in un articolo di matematica su una rivista! Vedi p.es. [15][4]). Sicché, dicendo che un certo ragionamento è "giusto" o è "sbagliato", siamo lontani dall'essere obiettivi, ma stiamo sostanzialmente dicendo che il livello di approssimazione e di rigore è adeguato o meno al contesto in cui siamo, rispetto all'età e alle conoscenze degli studenti, rispetto a quello che abbiamo fatto in classe in precedenza, e così via.

D'altra parte, nonostante come insegnanti siamo così abituati a interagire continuamente con l'errore, ci troviamo in grande difficoltà a parlarne dal punto di vista didattico, senza inferirne un giudizio, senza associarlo come prima causa a comportamenti "manchevoli" da parte degli studenti, a qualcosa che non hanno fatto o non hanno fatto abbastanza. È come se noi insegnanti per primi avessimo perso le parole adeguate per recuperare l'errore e per farlo diventare lo strumento didattico più potente a nostra disposizione.

Nel tentativo di recuperare queste parole e ricominciare a parlare d'errore, innanzitutto non dobbiamo dimenticarci che errore è una parola che rimanda a mille altri significati, che appartengono agli ambiti personali della nostra vita. E allora ogni errore, anche se viene compiuto in contesto matematico, anche se è molto tecnico, si porta dietro tutto un vissuto del quale dobbiamo essere consapevoli. Affermazioni sull'errore in campo matematico e didattico - sulla sua effettiva utilità, su come sia possibile lavorarci su, su come sia non solo possibile ma auspicabile viverlo come occasione e non come colpa - vanno a collidere con il ruolo che l'errore ha giocato nella nostra vita, non solo quella matematica ovviamente (vedi [17], [13]). Ecco allora che il portato personale, sociale e culturale dell'errore interferisce.

È stato interessante, tempo fa, intervistare alcune decine di docenti di matematica[5], con differenti età e anni di insegnamento alle spalle, e osservare la discrepanza tra il loro pensiero razionale e inconscio sull'errore: mentre il loro pensiero razionale indicava l'errore come una positiva occasione di apprendimento, le parole liberamente associate all'errore erano quasi sempre dominate dal senso di colpa o da un giudizio morale.

---

3 L'uomo è soggetto ad errare fin tanto che anela (*Faust*, Parte I, Prologo in Cielo)

4 Si tratta di uno degli interventi in un acceso dibattito nato all'inizio degli anni '90 sul *Bulletin* della *American Mathematical Society*, a proposito di quella che era stata definita come "*theoretical mathematics*", a intendere una matematica euristica, che non dipendesse necessariamente da dimostrazioni rigorose. L'articolo iniziale [9] ha dato origine alla risposta di Thurston [15] e a una risposta collettiva [3] di una quindicina fra i più qualificati matematici al mondo, a cui ha fatto seguito un altro intervento degli autori [10].

5 Si trattava di un gruppo di lavoro sull'errore, al convegno conclusivo di MATH.en.JEANS organizzato dal centro "*matematita*" e svoltosi a Milano, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi, nell'aprile 2010.

C'è anche un altro motivo, più interno alla matematica, per il quale l'errore viene ritenuto qualcosa da nascondere: come Grothendieck con molta efficacia ci fa notare in [7], normalmente in tutti i testi matematici (siano essi libri di testo o pubblicazioni di risultati di ricerca), non compare mai traccia del processo che ha portato ad un determinato risultato, ma resta solo l'esposizione finale pulita e perfetta. In effetti il processo che conduce al risultato può contenere errori, ma anche errori che hanno fornito indizi preziosi e che ci hanno fatto compiere un passaggio cruciale per arrivare alla meta.

Tutto ciò, sebbene ovvio, non è sufficientemente riconosciuto; la nostra percezione del noto proverbio “sbagliando si impara” può essere abbastanza distorta. Riportiamo a titolo di esempio le parole di uno studente che dice:

> *è importante lavorare sugli errori a scuola, così possiamo imparare come non commetterne più, ma se ciò capita ad un famoso scienziato sicuramente non porta a nulla di positivo*

mostrandoci una concezione molto riduttiva del ruolo dell'errore nell'apprendimento e nella ricerca stessa.

Ancora a proposito della parola “errore”, non dobbiamo neppure dimenticarci che non è un caso che “errare” significhi, oltre che “sbagliare”, anche “vagare senza meta”: e si vaga senza meta quando si è sbagliato strada, ma anche, per esempio, quando si arriva in una città che non si conosce e si vuole come prima cosa annusarne l’atmosfera. Si tratta di un’attività molto positiva, divertente, e anche costruttiva, perché, anche se ogni tanto si perde la strada, ne possiamo davvero ricavare un *feeling* della città che magari non otterremmo con un *tour* organizzato.

Uscendo dal turismo per tornare alla matematica, il vagare senza meta (condito anche di errori) è quello che spesso fa anche il matematico alle prese con un problema di ricerca.

H. Wu afferma che per molti tratti l’atteggiamento del matematico di fronte a un problema di ricerca è simile all’atteggiamento di uno studente alle prime armi:

> *In their routine grappling with new ideas, mathematicians need to know, for survival if nothing else, the intuitive meaning of a concept perhaps not yet precisely formulated and the motivation behind the creation of a particular skill and to have a vague understanding of the direction they have to pursue* [16, p. 379][6].

Questa analogia può esserci preziosa per individuare gli elementi significativi nel processo di apprendimento.

Lavorare sull’errore

Se vogliamo liberarci dall’errore come “colpa”, e recuperarlo come alleato nel processo di apprendimento, lavorare sull’errore deve corrispondere a pratiche ben precise, condivise con gli studenti, e avere una ricaduta reale sulla valutazione. Innanzitutto una premessa importante, anzi

---

6 Quando è alle prese con una nuova idea, il matematico ha bisogno, nel suo vagolare alla ricerca di teoremi e concetti nuovi, di poter usare un concetto a livello intuitivo, anche prima che sia stato formulato in modo preciso e rigoroso, così come ha bisogno di avere una comprensione sia pur vaga della direzione in cui sta andando, e delle motivazioni che lo spingono a quella scelta

cruciale: lavorare sugli errori, saperli riconoscere, interpretare, trasformare non è una abilità naturale, ma una capacità che va scoperta, coltivata, allenata.

Una prima pratica che può essere utile è quella di dare l'esempio. Dato che a tutti capita di sbagliare, cerchiamo di approfittare dei NOSTRI errori per ragionarci sopra, pubblicamente, insieme ai nostri studenti, cercando di analizzare qual è stato il procedimento mentale che ci ha portato a dire una cosa invece di un'altra. Non dobbiamo aver paura che la nostra autorevolezza venga meno per il fatto di riconoscere un errore. Anzi! Può capitare che questa autorevolezza addirittura aumenti, perché la sensazione che viene trasmessa agli studenti da un insegnante che ragiona con loro sugli errori che egli stesso ha commesso è una sensazione di estrema sicurezza. Se abbiamo bisogno di un'ulteriore conferma, possiamo anche pensare ai nostri *Maestri*, proprio a quelli con la M maiuscola, quelli che abbiamo molto stimato e preso ad esempio: certamente la nostra stima non è cambiata di un'unghia quella volta che ci siamo accorti che anche a loro ogni tanto scappava un errore!

Un'altra pratica che può essere interessante è quella che parte da un lavoro di analisi dell'errore. Non vogliamo qui parlare in astratto dell'errore, ma viceversa, molto concretamente, portare gli studenti a partire dagli errori che hanno commesso, attraverso la disamina e l'esplicitazione degli stessi, a svolgere su di essi un lavoro meticoloso e artigianale, per capirne la genesi e le cause; questo comporta anche un lavoro metacognitivo sul proprio metodo di studio (di cui sempre si parla in astratto, senza mai poi legarlo a qualcosa che concretamente possa essere modificato o migliorato), e quindi sui diversi fattori che a questo metodo di studio concorrono.

Individuare la genesi di un errore può essere utile per lo studente, ma può anche essere illuminante per gli insegnanti e può provocare uno spiazzamento del punto di vista, ad esempio costringendoci a rivedere e a volte a ribaltare la nostra classificazione degli errori in gravi o meno gravi.

In effetti, una delle cose che emerge con più evidenza da questo tipo di analisi (o meglio, che è utile aiutare gli studenti a far emergere) è il fatto che un conto è il singolo errore, altro il comportamento errato che ha portato all'errore; e conviene (al fine di superare la difficoltà) distinguere tra le due cose. E così si può scoprire che quelli che a noi potrebbero sembrare errori gravi (pensiamo ad esempio a un errore di manipolazione algebrica come dedurre $x \geq 0$ dalla disequazione $x^2 \geq 0$) in realtà non indicano necessariamente una non comprensione della disequazione in questione, ma piuttosto un modo di procedere meccanico che, questo sì, va riconosciuto come un comportamento errato, e soprattutto va modificato.

A volte la genesi di un errore non risiede nell'ignoranza di un capitolo di matematica, ma piuttosto in un'attitudine errata verso la matematica. Per esempio, può capitare che uno studente riconosca una situazione che porta direttamente alla corretta soluzione di un problema da un punto di vista geometrico, ma che non la usi, ritenendola non valida, perché è convinto che la corretta soluzione richieda una manipolazione algebrica. Può anche capitare che una conoscenza superficiale dei concetti renda lo studente così insicuro che una minima divergenza da ciò che ritiene essere la via o la formalizzazione standard si trasformi in una difficoltà insormontabile.

Lavorare sui comportamenti è spesso più utile che non lavorare sul singolo errore; anche perché questo tipo di lavoro permette di comprendere una cosa fondamentale, ovvero che per correggere un errore non si può riproporre semplicemente la stessa situazione, ma va modificato il contesto, va messo lo studente in condizione di vedere la stessa cosa da un altro punto di vista.

Di fronte a certi errori, come il precedente, può essere forte la tentazione di costringere gli studenti a risolvere un gran numero di esercizi dello stesso tipo. Occorre però essere consapevoli che questo tipo di reazioni non porta da nessuna parte o, peggio, paradossalmente, può essere controproducente. Innanzitutto è errata l'analisi che ne è alla base: ci dimentichiamo di quanto sia facile sbagliare, e di quanto rientri nella normalità incorrere in un errore, anche quando si è magari perfettamente capito perché quell'affermazione è sbagliata. Non si può quindi assolutamente dare per scontato che reiterare l'errore significhi non aver capito nulla del concetto matematico sottostante. Ma c'è di peggio: la ripetizione di esercizi senza cambiare il contesto favorisce la memorizzazione e l'acquisizione di una modalità di affrontare le questioni in modo automatico, che porta a cercare il meccanismo che funziona sempre, senza concederci il lusso e il piacere di ragionare. Viceversa, cambiare contesto, possibilmente anche spiazzando i ragazzi con qualcosa di imprevisto, può essere proprio la molla che li induce in maniera naturale ad abbandonare gli automatismi e ad assumere un atteggiamento critico, facendoli poi tornare sui problemi normali con un atteggiamento più sano.

In effetti questo è uno dei tratti distintivi delle attività proposte dal Centro "*matematita*": i quesiti sono sempre posti in una maniera non-standard, cosicché diventa impossibile cercare la bacchetta magica che risolva ogni tipo di problemi.

Un commento che abbiamo spesso ricevuto dagli utilizzatori dei *kit* che il Centro "*matematita*" mette a disposizione delle scuole[7] è proprio la considerazione che spesso accade che i ragazzi cambino atteggiamento (anche rispetto ai "normali" problemi curricolari). Ciò che segue è rappresentativo di un riscontro abbastanza comune che riceviamo dagli insegnanti dopo aver utilizzato un *kit:*

> *… questo laboratorio ha insegnato agli alunni a* ***spostare l'attenzione dalle tecniche di calcolo alla gestione del pensiero creativo*** *sottoposto alla logica, anche nello studio dei temi curriculari.*

E il docente aggiungeva, con un certo stupore, che i ragazzi poi "guardavano dall'alto" ad esempio le discussioni delle equazioni di secondo grado, dopo aver avuto a che fare nel *kit* con problemi topologici che con queste non avevano nulla a che vedere.

E arriviamo così a toccare un altro punto fondamentale: una delle caratteristiche più significative della matematica, e al tempo stesso più coinvolgente e gratificante, è proprio quella del gusto di risolvere problemi, anzi piuttosto quella del gusto di affrontare problemi – e se poi si risolvono tanto meglio (vedi anche [4], [11]). Se riusciamo a trasmettere a uno studente questo gusto, abbiamo fatto un passo estremamente importante, e l'abbiamo fatto anche se la soluzione dei problemi si mescola ad errori.

Vediamo qualche esempio preso dal lavoro sistematico sugli errori del secondo autore in una scuola secondaria. Rimandando l'analisi tecnica dei risultati della sperimentazione a un altro articolo, pensiamo sia più utile proporre qui qualche esempio diretto; con questa scelta vogliamo sottolineare come a volte, quando l'ascolto degli studenti è condotto sistematicamente, in classe come nei momenti non strutturati della vita scolastica, il messaggio informale che afferriamo dalle loro conversazioni, sebbene per certi versi sia soggetto ad ambiguità, paradossalmente può essere più attendibile di quello delle risposte formali ai questionari ufficiali.

Quella che segue è la frase di una studentessa alla quale era stato chiesto di scrivere almeno

---

7 Il Centro "*matematita*" realizza e mette a disposizione delle scuole dei *kit* di laboratorio con schede di lavoro su diversi problemi e materiale manipolabile che si presta a un'attività di tipo sperimentale su tali problemi: vedi http://www.matematita.it/realizzazioni/materiale_didattico.php.

una cosa che le era piaciuta nel compito in classe che aveva fatto (peraltro con esiti non esattamente brillanti). Il problema proposto prevedeva di risolvere l'equazione $7^x=5$ utilizzando il logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale; la studentessa non aveva visto questa possibilità e aveva dato inizio a una serie di tentativi per approssimazioni successive. Il suo commento circa quello che le era piaciuto nel compito è stato:

> *…non sapendo risolvere non ho lasciato l'esercizio senza una soluzione, ma ho cercato di "trovarla"…. Sono sicura che questo può capitare nella vita di tutti i giorni, dove spesso è meglio trovare una soluzione sbagliata a un problema che non tentare di risolverlo in alcun modo*!

Queste invece sono le parole di una ragazza che nel giro di un anno e mezzo è passata da una situazione molto negativa alla sufficienza:

> *mi è piaciuta la facilità e la scioltezza con cui sono riuscita a svolgere gli esercizi, essere riuscita a farli mi ha fatta sentire felice. Ho capito che se voglio posso farcela. ….*

A queste frasi ci piace aggiungere i commenti di alcuni bambini delle scuole primarie, dopo che per un anno hanno partecipato all'iniziativa dei giochi *on line* del Centro "*matematita*"[8]

> *… è stato bello perché era difficile…*

dove emerge chiaramente come lo scontrarsi con la difficoltà non sia necessariamente fonte di frustrazione e di scoraggiamento, ma, viceversa, possa diventare un tassello che genera sicurezza e autostima: non solo lavorare a questi giochi è stato bello, ma è stato bello **proprio perché** era difficile.

L'errore e la valutazione

Ce qui limite le vrai, ce n'est pas le faux, c'est l'insignifiant (Réné Thom)[9]

Appare chiaro anche dagli esempi precedenti che, come primo passo, uno studente deve essere messo in condizioni di poter davvero sviluppare e apprezzare il gusto di ragionare, il gusto di affrontare e risolvere problemi, di provare sulla sua pelle, sia pure in piccolo, quell'avventura straordinaria che è fare ricerca. Ed è chiaro che qui ci si scontra con mille difficoltà legate anche alla struttura della scuola, che spesso ha tempi e obblighi che non sono i più logici e i più adatti all'apprendimento.

Non possiamo ovviamente entrare nel merito di queste costrizioni, che pure non dobbiamo dimenticare; andiamo però a toccare un altro nodo, che ugualmente ci sembra cruciale affrontare quando si parla di errore, se non si vuole che tutti i bei ragionamenti che si fanno restino lettera morta: ovvero il nodo della valutazione. Partiamo da un'affermazione molto diretta (e molto provocatoria), che poi andremo a esemplificare e argomentare: **la valutazione non può e non deve**

---

8 Sul sito http://www.quadernoaquadretti.it/ da molti anni il centro "*matematita*" propone alle scuole primarie e/o alle scuole secondarie di primo grado un percorso di giochi che prevede una tappa al mese per tutto l'anno e una gara finale. Sul sito si possono trovare i testi dei problemi proposti.

9 Il contrario del vero non è il falso, è il banale, [14, p. 132].

essere incentrata sull'errore.

Non può, perché non ha senso sperare di impostare con i ragazzi un lavoro di analisi dell'errore che li porti a un effettivo apprendimento se poi, a conclusione di questo percorso, si torna al fatto che chi non fa errori ha la valutazione massima e chi fa sette errori ha la valutazione ottenuta togliendo sette punti dal massimo.

Ma non può anche e soprattutto perché **non è vero**; non è vero né che chi ha capito non fa errori né che chi non ha capito ne fa necessariamente di più. Quindi non ha senso che una valutazione ragionevole (che deve valutare cosa la persona ha assimilato di un dato argomento, e come lo sa utilizzare) sia invece imperniata solo ed esclusivamente sugli errori.

Se uno studente, per rispondere alla domanda "*è vero che 15×7×8×23×41 è un multiplo di 10?*", non si accorge del fatto che fra i fattori compaiono un numero pari e un multiplo di 5, ma svolge esplicitamente la moltiplicazione per arrivare alla conclusione che 792120 è un multiplo di 10, come dobbiamo valutarlo? Non possiamo dire che la risposta è sbagliata, perché non lo è. E non possiamo nemmeno dire che il procedimento è scorretto, perché a priori non lo è. Però il procedimento che lo studente ha utilizzato per arrivare alla conclusione corretta è un procedimento che ci fa capire che chi l'ha usato non ha assolutamente le idee chiare sulla divisibilità; oppure, e questo è forse anche più probabile, che è abituato a un procedimento meccanico, da affrontare senza pensare a cosa si sta facendo. Quindi nessun errore, ma la valutazione è negativa.

Come a una valutazione negativa è necessario arrivare se uno studente, per risolvere l'equazione

$$(x-2)(x+3)=0$$

comincia a moltiplicare i due fattori per poi applicare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado. O magari, per risolvere l'equazione

$$(x-2)(x+3)(x-7)=0$$

moltiplica e conclude poi che non è capace di risolverla perché non conosce una formula risolutiva per l'equazione di terzo grado. Ma anche nel primo caso, e ipotizzando che non si infilino nella risoluzione degli errori di conto e che lo studente arrivi alle due radici 2 e -3, cioè che "non faccia errori", la valutazione deve essere ugualmente pesantemente negativa. Anche qui due diverse situazioni sono possibili: può essere che lo studente non abbia capito nulla di cosa significhi trovare le radici di un'equazione, ma può essere anche che si sia innescato un automatismo che è esattamente l'atteggiamento che dobbiamo combattere. E siamo certi che ogni insegnante ha a disposizione centinaia di esempi analoghi.

Ci sono però anche esempi nell'altro verso: un problema affrontato con una serie di tentativi e di ragionamenti che portano lo studente a risultati sbagliati, ma che sono comunque tentativi ragionevoli e ragionamenti sensati, ci fa pensare che lo studente stia impadronendosi degli strumenti in discussione e quindi, anche a livello di valutazione, un tale procedimento può e deve essere valutato in modo largamente più positivo rispetto a una risoluzione pedissequa, in cui magari i risultati finali sono corretti, ma i metodi automatici utilizzati non si prestano a sviluppare ragionamento e autonomia. Sarebbe troppo lungo esaminare situazioni di questo tipo (le rimandiamo a una futura pubblicazione), vogliamo solo far notare che altri esempi possono essere trovati nella storia della matematica, e sarebbe istruttivo mostrare agli studenti che spesso alcuni errori di grandi matematici hanno condotto a grandi scoperte!

Tornando ai due precedenti esempi negativi, notiamo che in certi contesti, quali quelli di una valutazione esterna, o di un test d’ingresso, o di un concorso, o nella struttura di un test a risposta chiusa, risposte come quelle citate potrebbero portare a una valutazione non negativa.

Tuttavia in una situazione di classe quello che ci interessa è, quasi sempre, il modo con cui si è arrivati al risultato e come questo possa sviluppare alcune modalità di ragionamento piuttosto che altre. E teniamo presente che lo sviluppo del pensiero critico è qualcosa che non serve certo solo per la matematica e quindi solo a chi proseguirà gli studi scientifici, ma è – ancor più oggi rispetto al passato – uno strumento indispensabile per il cittadino.

Sia chiaro che dire che l’errore è poco importante nella valutazione non è un commento “buonista”, mirante a sottovalutare gli errori dei ragazzi e a valutare solo le cose positive. Il punto è un altro. Vogliamo sottolineare che, nel processo educativo, il nostro obiettivo è, in positivo, che il maggior numero di ragazzi possibile acquisisca il maggior numero possibile di concetti: la valutazione dovrebbe essere coerente con questo obiettivo e un'eccessiva attenzione all'errore rischia di farcelo dimenticare.

Certamente, mettere in discussione una valutazione che spesso misura quasi esclusivamente la presenza o meno di errori, significa toccare un grande tabù. Ma va fatto, e va esplicitato agli studenti il fatto che lo si sta facendo (molti di noi, infatti, già lo fanno, magari implicitamente, magari senza nemmeno rendersene conto). Va fatto anche se siamo consapevoli che sicuramente ci saranno sempre circostanze o valutazioni che necessariamente sono di altro tipo.

Infine, un'altra ragione significativa per rompere questo tabù, è la considerazione di quanto pesantemente una valutazione centrata sull'errore può condizionare il processo di apprendimento: in effetti questa produce, come ovvia conseguenza, la paura di sbagliare che paralizza il ragionamento ed è quindi il peggior nemico dell'apprendimento. Abbiamo avuto occasione di osservare questa reazione (ovvia, ma spesso dimenticata) nel contesto della mostra “*Simmetria, giochi di specchi*”: spesso capita che gli studenti riconosciuti come buoni studenti (e a volte anche i loro insegnanti) non reagiscano, o reagiscano molto scarsamente, a problemi differenti da quelli ai quali sono abituati; mentre, al contrario, studenti noti per essere cattivi studenti semplicemente facciano tentativi, spinti dalla curiosità; e non è insolito che proprio loro non solo arrivino a una soluzione positiva, ma che abbiano anche idee brillanti e formulino risposte ben costruite. Tutti noi abbiamo avuto modo di osservare quanto meravigliosa sia la potenziale capacità di apprendimento dei bambini, quando non temono di sbagliare; e qui ancora possiamo citare Grothendieck:

craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose[10]

Va aggiunto anche che nella scuola di oggi, in Italia, mancano completamente le condizioni ambientali per sviluppare una didattica che punti a facilitare situazioni di apprendimento in cui l’errore sia una normale tappa di crescita e si valuti quel che si è imparato. Una didattica di questo tipo richiede un enorme lavoro su ogni singolo allievo, richiede tempi distesi, richiede programmi con contenuti significativi, richiede di poter avere a che fare con un numero di allievi per insegnante non troppo elevato. Richiederebbe un confronto con gli altri docenti e… Tuttavia, speriamo che tenere a mente dove vogliamo arrivare, nonostante sappiamo che la meta è, in questo momento, non realistica, possa essere utile per trovare compromessi ragionevoli: è possibile (e forse è proprio necessario) svolgere una piccola e quotidiana opera di “resistenza culturale”, e inventarsi pratiche e situazioni che vadano in questa direzione, ritagliandosi, almeno una volta ogni tanto, un tempo in cui è possibile “fare” matematica, e farla insieme, in gruppo, scoprendo nel lavoro di classe il piacere di unire le intelligenze.

---

10 Aver paura dell’errore è la stessa cosa che aver paura della verità [7, p. 129]

Il linguaggio e il rigore

Il problema dell'errore in matematica è fortemente legato all'aspetto del linguaggio e al rapporto che c'è in matematica tra linguaggio naturale, linguaggio specifico e rigore. Rimandiamo altrove per una trattazione più approfondita di questi temi ([5]) e ci limitiamo qui a qualche osservazione, fra quelle che più direttamente vanno a toccare il tema dell'errore.

Abbiamo già osservato che il rigore matematico (che spesso usiamo – consapevolmente o inconsapevolmente – per "misurare" gli errori) non è mai un rigore assoluto, e non potrebbe esserlo, sicché su questo terreno (esplicitamente o implicitamente) dobbiamo comunque accettare dei compromessi. Meglio, a nostro parere, esserne consapevoli e accettarli in maniera esplicita. E se questo discorso vale in generale, per qualunque tema, ancor di più vale se stiamo parlando di quel lavoro artigianale, che abbiamo proposto e raccomandato, di analisi degli errori, un lavoro in cui, per trattare gli errori e per manipolarli, occorre parlare, occorre scrivere. Occorre cioè passare attraverso una fase di verbalizzazione che non è necessariamente rigorosa; anzi, che necessariamente rigorosa non è.

E anche su questo tema spunta un altro grande tabù: la possibilità di fare matematica in modo informale, non rigoroso. Ma che cosa vogliamo dire esattamente, come si giustifica e che senso può avere parlare di matematica in maniera non rigorosa? Intanto diciamo subito che non stiamo rinunciando al rigore e che il rigore ci vuole, eccome! Piuttosto, quello che stiamo dicendo è che il rigore non deve essere anteposto alla comprensione, alla trasmissione delle idee, e quindi è meglio che uno studente provi a dire in maniera rozza che idea si è fatta di un certo concetto, in modo che si possa via via raffinare e ripulire questa idea, piuttosto che ripeta a memoria frasi che sono per lui prive di senso. Il rigore potrà quindi arrivare con la comprensione e a quel punto potrà essere gustato come una conquista e non sarà subito come una necessità imposta e non riconosciuta.

La vera discriminante che legittima o meno il linguaggio rigoroso è il significato, cioè se chi parla o chi scrive riesce o meno a dare un senso a ciò che sta facendo. Abbiamo ripetutamente osservato che una percentuale molto alta degli errori madornali proviene da un uso di parole completamente avulso dal loro significato; ed evidentemente l'abitudine scolastica ha fatto sì che lo studente si sia ritenuto obbligato a usare quelle parole, anche senza che alle parole corrispondesse un significato effettivo.

Se vogliamo evitare queste assurdità, dobbiamo lasciare ai ragazzi la libertà di esprimere le idee che via via si costruiscono senza ingabbiarli in un linguaggio stereotipato e inconcludente, anche se questo dovesse voler dire rinunciare (provvisoriamente) alla coerenza e alla non ambiguità che è tipica del linguaggio matematico.

Peraltro, dobbiamo anche come insegnanti essere consapevoli del fatto che lasciare i ragazzi liberi di parlare può rivelarsi assai interessante anche per (almeno) un altro motivo: queste discussioni in libertà portano alla superficie il fatto che ciò che si insegna va ad innestarsi su un sistema di credenze spesso non esplicitate che interferiscono (e possono interferire in positivo o in negativo) con i concetti che si stanno apprendendo. Questo è un fatto molto più accettato e indagato nella didattica della fisica (vedi [2]), ma anche per la matematica c'è una "matematica ingenua" intuitiva, informale, fatta di esperienze percettive che dobbiamo imparare a conoscere e a esplicitare. E da un lato occorre imparare a cogliere esattamente in quali punti questa matematica ingenua entra in collisione con la matematica formale. Ma anche, dall'altro, occorre imparare a individuare quegli spunti che ci permettono, in positivo, di approfittare delle conoscenze intuitive e informali, sfruttandole per dare una base solida e interiorizzata alle conoscenze successive.

Osservare come parlano gli studenti può farci a volte scoprire questi punti di contatto fra le loro conoscenze pre-esistenti, di vita quotidiana, e la matematica che stiamo loro insegnando, a partire dall'uso della "e", della "o", della negazione e della implicazione nel linguaggio quotidiano e in quello logico-matematico, fonte dei più reiterati tra gli errori commessi dagli studenti. Dovremmo porre attenzione al fatto che noi siamo così abituati a questi prerequisiti di logica, che non solo li usiamo normalmente nella vita di tutti i giorni, ma diamo anche per scontato che il loro uso entri nei normali tipi di ragionamento comuni per chiunque, mentre ciò è ben lontano dall'essere vero. E, parallelamente, il significato proveniente dalle situazioni di vita reale può anche aiutare i ragazzi a evitare certi errori standard. Per fare un esempio, tutti sappiamo quanto sia comune l'errore di ritenere equivalenti le due implicazioni $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ e $\boldsymbol{(non\ p) \Rightarrow (non\ q)}$; forse potrebbe essere più facile evitarlo se una volta si facesse osservare ai ragazzi come una pubblicità ingannevole del tipo "*se non giochi non vinci*" conti proprio sul fatto che inconsapevolmente la si accosti all'altra implicazione, certo non equivalente, "*se giochi, vinci*".

Va infine osservato che il fatto di permettere ai ragazzi di parlare in libertà, contrariamente a quanto si potrebbe pensare, non comporta, per noi insegnanti, il fatto di essere approssimativi in ciò che insegniamo, ma, viceversa, ci obbliga alla massima precisione possibile. Infatti – affinché non ci sia collisione, nel momento successivo, con la matematica formalizzata – è necessario che anche quando si è al primo livello, sul piano informale, le nostre affermazioni siano comunque sostanzialmente corrette, anche se tale correttezza non sarà espressa con tutto il rigore del piano formalizzato.

Libertà di parlare, dovere di ascoltare

Auspicare che l'insegnante lasci gli studenti liberi di esprimersi come credono richiama in parallelo un'altra qualità indispensabile per un insegnante, e in particolare per un insegnante che voglia puntare a una didattica che rivaluti e non demonizzi l'errore: la capacità di ascoltare. È necessario che un insegnante sappia ascoltare, senza fretta e senza dare risposte in automatico (cercando cioè di evitare lo stesso meccanismo che cerchiamo di bloccare nei nostri studenti), che sappia sospendere il giudizio (specie quello morale) e cercare di capire più a fondo quello che gli errori dei nostri studenti ci indicano.

Ci piace a questo proposito richiamare una frase di Federigo Enriques ([6, p. 12]):

> "*Soltanto un ragioniere, che svolge semplici calcoli sopra i numeri, potrebbe ridurre l'errore alla distrazione della mente stanca. Il lavoratore intellettuale trova qui un campo più vasto da investigare. Il Maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua arte didattica …. E degli errori propriamente detti, che talora sono in rapporto con manchevolezze delle singole menti, ma nei casi più caratteristici si presentano come tappe del pensiero nella ricerca della verità, il Maestro sa valutare il significato educativo: sono esperienze didattiche che egli persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche ad errare per imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere*".

A volte si ha la sensazione che dietro alle difficoltà degli studenti si possa nascondere qualcosa di molto più profondo. Quella che da molti di loro (e non solo) viene indicata come la causa di molti errori è la mancanza di tempo, è la fretta. D'altra parte, la fretta spesso non è neanche legata strettamente alla mancanza di tempo, ma è diventata un'attitudine del pensiero, un'incapacità di fermarsi su quello che si sta facendo, di dare tempo al ragionamento, di non accontentarsi di risposte automatiche. E non si tratta solo di difficoltà a concentrarsi, ma c'è anche la difficoltà di reggere la frustrazione della risposta che non viene subito, della strada sbagliata che si prende e che non porta da nessuna parte. Anche perché a tutto ciò non siamo abituati a dare, nella valutazione oggettiva, alcun valore, e in tal modo lo rendiamo invisibile e perciò inutile. E invece, viceversa, è proprio a questo lavorio che dovremmo trovare il modo di dar peso e valore.

A volte può anche succedere che un errore nasconda quella che è un'acquisizione corretta del concetto che si sta discutendo; la frase magari va solo un po' ripulita, o sfrondata da qualche elemento non necessario. E, con un ascolto superficiale e meno attento, la frase ci poteva sembrare sbagliata semplicemente perché il metodo usato per arrivare alla soluzione era diverso dal nostro: in ogni caso, un ascolto attento è un elemento determinante per riuscire a guidare i ragazzi sulla strada che loro stessi hanno trovato (evitando di imporre a tutti i costi la nostra strada: vedi [11] per una discussione e per alcuni esempi su questo tema).

Un ascolto attento deve anche sempre tenere la bussola sul nostro principale obiettivo: che è quello di imparare, di insegnare, di trasmettere le idee, di trasmettere bellezza; avere chiara questa bussola ci dà anche una scala di priorità ben precisa: ed è facile allora rendersi conto di quando è opportuno mettere in evidenza, e correggere, un errore e di quando invece l'aspetto saliente della comunicazione è un altro: sarebbe sbagliato (da un punto di vista didattico) sottolineare un errore nel momento in cui ci rendiamo conto che un ragazzo ha fatto una "scoperta" e che ci sta comunicando questa sua "scoperta".

Ma, tornando alle difficoltà connesse alla fretta, ci sono anche, nell'epoca in cui stiamo vivendo, delle ragioni più profonde, che tempo fa non c'erano. Forse sotto i nostri occhi sta avvenendo una rivoluzione, di cui ancora non ci rendiamo conto fino in fondo. Qualcuno l'ha definita "la terza fase" (vedi [12]), una nuova forma del sapere, ovvero il passaggio da un modo di conoscere "verticale" (il nostro, fatto di approfondimenti, di capacità di analisi, di concentrazione…) a uno "orizzontale" (quello dei nostri studenti, che è in relazione ovviamente con l'uso massiccio delle nuove tecnologie, con la capacità/modalità di essere contemporaneamente in *chat*, studiare, mandare sms, passare da un sito all'altro, navigare…). Come tutto ciò influenza il modo di strutturare il ragionamento dei nostri studenti? Possiamo liquidarlo superficialmente con "*gli studenti di una volta erano migliori*"?

È interessante osservare come, in questi ultimi anni, molti matematici abbiano cominciato ad esplorare nuove forme di comunicazione, che tengano conto di questo modo orizzontale di imparare, e come essi abbiano dovuto affrontare il problema di adattare la nostra idea di rigore matematico a questo nuovo contesto. Giusto per dare qualche esempio (tra i tanti), possiamo far riferimento a un libro come [8], che è fortemente costruito su una comunicazione attraverso le immagini, e nello stesso tempo tocca una quantità enorme di matematica; o un DVD come [1], in cui alcuni oggetti matematici assolutamente non banali (come gli *orbifold*) sono trattati in una maniera che ne permette un modo orizzontale di lettura, anche da parte di persone dotate di un bagaglio matematico ristretto. Certo, anche il ruolo dell'errore sarà differente in questo tipo di comunicazione; e potrà costituire un interessante tema di approfondimento.

Ancora una volta, l'unica risposta che ci sembra ragionevole è quella di saper ascoltare, e ricercare così con pazienza le cause profonde degli errori, partendo dagli errori degli studenti (e dai nostri), dalle nostre categorie di pensiero e di apprendimento, da quella verticalità che è sinonimo di profondità, spetta a noi inventare una didattica che tenga conto del loro modo orizzontale, senza demonizzarlo, ma costruendo una sintesi. Questo è ciò che spetta a noi fare, perché è nostra la memoria del vecchio sapere e perché siamo in questo "generazione ponte" in grado di passare il testimone alle nuove generazioni.

Siamo grate alla redazione e ai *referee* dei *Notices of the American Matematical Society* per i loro preziosi commenti e i loro utili suggerimenti. Ringraziamo Kim Williams per la traduzione in inglese del nostro testo italiano. Ringraziamo anche i molti studenti e docenti che ci hanno fornito la materia prima su cui riflettere e attraverso cui arrivare alle considerazioni qui esposte.

Bibliografia

[1] Associação Atractor, DVD: *Simetria – apresentação dinâmica* (*Simmetria – Una presentazione dinamica*), Atractor, 2009

[2] Arnold B. Arons, *Guida all'insegnamento della fisica*, Zanichelli, 1992

[3] M. Atiyah et al, Responses to "Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics" by A. Jaffe and F. Quinn, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 30, n. 2, 1994, p. 178-207

[4] M. Cazzola, *Problem-Based Learning and Mathematics: Possible Synergical Actions*, In L. Gómez Chova, D. Martí Belenguer, and I. Candel Torres (Editors), *ICERI2008 Proceeding*, IATED (International Association of Technology, Education and Development), Valencia, Spain, 2008. http://www.formazione.unimib.it/DATA/personale/CAZZOLA/raccolta/madrid08-ok.pdf Ultimo accesso 23 Maggio 2012

[5] M. Dedò, Rigour in communicating maths – a mathematical feature or an unnecessary pedantry? Presented at the workshop, "Raising the public awareness of mathematics", Óbidos, Portugal, 2010 (uscirà nel volume *Raising Public Awareness of Mathematics*, Springer).

[6] F. Enriques, *Il significato della storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna, 1936 (edizioni successive 1994, 2004)

[7] A. Grothendieck, *Récoltes et sémailles*. *Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien.* http://www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/RetS.pdf Unltimo accesso 23 Maggio 2012

[8] G. Glaeser, K. Polthier, *Bilder der mathematik*, Spektrum, 2010

[9] A. Jaffe, F. Quinn, Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 29, n. 1, 1993, p. 1-13

[10] A. Jaffe, F. Quinn, Response to comments on "Theoretical Mathematics", *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol.30, n.2, 1994, p.208-211

[11] Paul Lockhart, *Il lamento di un matematico – come trasmettere una passione?* XlaTangente, n.10, 2008, ristampato come *Contro l'ora di matematica*, Rizzoli, 2010; originariamente come *A mathematician's lament*. http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf. Ultimo accesso 23 Maggio 2012

[12] R. Simone, *La terza fase – forme di sapere che stiamo perdendo*, Laterza, 2000

[13] Anne Siety, *Matematica, mio terrore*, Salani 2001

[14] R. Thom, *Prédire n’est pas expliquer*, Echel, Paris, 1991

[15] W. P. Thurston, On Proof and Progress in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc*., vol. 30, n. 2, 1994, p. 161-177

[16] H. Wu, The Mis-education of Mathematics Teachers, *Notices of the Amer. Math. Soc*., vol, 58, n. 3, March 2011. Available at http://www.ams.org/notices/201103/index.html. Ultimo accesso 23 Maggio 2012

[17] R. Zan, *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer, 2007