La storia del *poliedro che non c'è*

(estratto da M. Dedò, *C'è bisogno di "spirito geometrico": qualche esempio*, in "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", vol.41 A-B, n.5, novembre-dicembre 2018)

Questa storia nasce da un errore (anzi, da una serie di errori…); e, come spesso accade, l'errore iniziale ha generato una vasta e varia gamma di osservazioni, di belle idee, di spunti e occasioni per richiamare e raccontare dei fatti matematici significativi. Siccome si vuole qui raccontare una storia, me la prenderò comoda, e prima di *andare al punto*, farò molte deviazioni non necessarie, sperando con questo anche di dare un contributo a quell'*elogio della lentezza* che appare sempre più opportuno, o addirittura necessario, nella scuola di oggi, anche, ma non soltanto, alla ricerca dello *spirito geometrico* perduto.

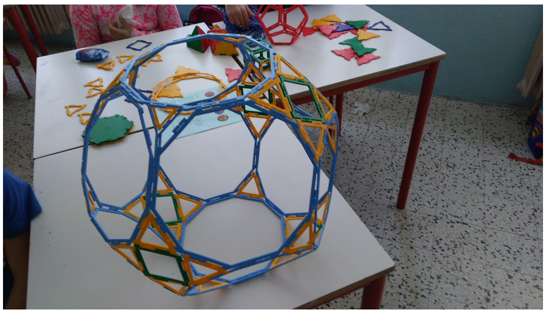

Figura 1

L'artefice del *poliedro che non c'è* (**figura 1**) è un bambino di scuola primaria, che, avendo a disposizione delle tessere di Polydron (uno strumento che consiste di tessere poligonali di diverse forme, con la possibilità di incastrarle fra loro), aveva ricevuto la consegna di costruire degli oggetti usando sempre lo stesso tipo di tessera. A questo bambino evidentemente non difettano fantasia e immaginazione, sicché si è probabilmente stufato di seguire la consegna ed è andato avanti per la sua strada, con molta determinazione, mescolando triangoli equilateri, quadrati e decagoni regolari; e bene fecero gli insegnanti presenti a lasciarlo proseguire fino a chiudere il suo piccolo capolavoro. E qui val la pena di fermarsi a osservare che i bambini possono autonomamente arrivare a queste costruzioni, e lo fanno: è utile che anche noi ce ne ricordiamo quando mostriamo loro (soltanto!) cubi e piramidi!

Fatti i complimenti al ragazzino, si apre il secondo stadio: ma questo poliedro che cos'è? A prima occhiata, non sembra appartenere a qualche categoria di poliedri noti e riconoscibili (non è un poliedro regolare, non è un poliedro uniforme); però è convesso, e le sue facce sono tutte poligoni regolari, dovrebbe quindi rientrare fra i meno noti poliedri di Johnson (che sono per l'appunto i poliedri convessi, a facce regolari): ma questi sono stati completamente classificati, sono 92 (oltre alle due famiglie infinite di prismi e antiprismi), e si può verificare che il poliedro costruito dal ragazzino non è fra questi 92.

La spiegazione ovvia di questa contraddizione è che il materiale che il bambino aveva a disposizione gli ha permesso di forzare un po' la costruzione: magari quei 10 punti che dovrebbero essere vertici di un decagono regolare (o quei 4 che dovrebbero essere vertici di un quadrato) di fatto non lo sono; magari (per poco) non sono complanari, oppure lo sono, ma il poligono di cui sono vertici (per poco) non è regolare. E quel *per poco* è talmente poco che si riesce a forzare un po' le tessere del Polydron e a costruire ugualmente l'oggetto.

Questa spiegazione è plausibile (ed è anche la spiegazione corretta). Potremmo giustificarla, indirettamente, rimandando al teorema che garantisce che la lista dei poliedri di Johnson è quella e questo oggetto non rientra nella lista, chiudendo così il discorso. Però il nostro interesse qua è principalmente didattico, quindi proviamo a risolvere direttamente la questione del *poliedro che non c'è* (come se non conoscessimo la lista dei poliedri di Johnson), e approfittiamo di questa *storia* per raccogliere strada facendo tutto ciò che può spuntare da questa situazione (e che potrebbe offrirci degli spunti interessanti in un'aula scolastica). Per esempio, già dicendo che si potrebbero cercare le eventuali irregolarità nei presunti quadrati e nei presunti decagoni (prima che nei triangoli) stiamo implicitamente usando un fatto geometrico significativo: è vero che anche i presunti triangoli equilateri potrebbero non essere equilateri, però sono comunque triangoli, perché tre punti sono sempre complanari; questo non è più vero per 4 o per 10 punti, quindi c'è in quel caso una condizione preliminare in più che deve essere soddisfatta.

Osservando meglio la costruzione del ragazzino (o, meglio ancora, rifacendola con lo stesso materiale), si resta colpiti nel notare che la disposizione delle facce non è affatto casuale, ma è molto simmetrica, e richiama in particolare la simmetria del cubo. Si nota infatti che ci sono dei triangoli isolati, circondati da tre decagoni, questi triangoli sono 8, i loro centri sembrano essere vertici di un cubo e compare quindi un asse di rotazione di ordine 3 passante per i centri di questi triangoli (**figura 2**).

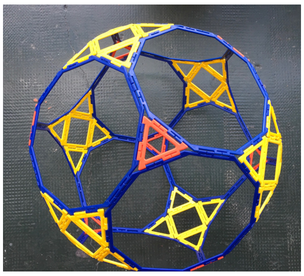

Figura2

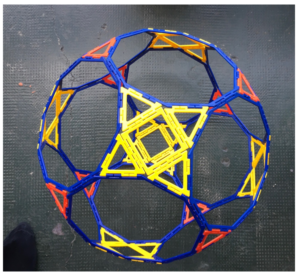

Figura 3

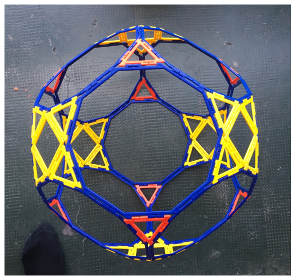

Figura4

Ci sono poi dei quadrati, circondati da 4 triangoli; questi quadrati sono 6, corrispondono alle facce del cubo e compare quindi un asse di rotazione di ordine 4 passante per i centri dei quadrati (**figura 3**).

I decagoni corrispondono agli spigoli del cubo; ciascun decagono è adiacente a due dei triangoli isolati e a due di quei gruppi formati da un quadrato e 4 triangoli (esattamente come ogni spigolo del cubo connette due vertici ed è adiacente a due facce); con la retta per i centri di due decagoni opposti compare quindi un asse di rotazione di ordine 2 (**figura 4**).

E qui ci fermiamo per osservare il ruolo, prepotente, della simmetria: è la simmetria che *prende la mano*, nel costruire questo oggetto, come probabilmente ha preso la mano del ragazzino. Non c'è bisogno di sapere quanti e quali sono gli assi di simmetria del cubo per *vedere* che sta spuntando una struttura regolare e per continuare a seguirla: ed è facile immaginare che sia questo ciò che ha fatto completare la costruzione al ragazzino. Da parte nostra, aumenta lo stupore per ciò che è accaduto e constatiamo, ancora una volta, come la simmetria sia un fattore potentissimo di organizzazione del pensiero (basti qui confrontare la **figura 1** con le successive **figure 2,3,4**); tuttavia, si resta anche stupiti del fatto che non sembra di aver dovuto esercitare particolari forzature sulle tessere di Polydron per chiudere la costruzione. Eppure… sappiamo che questo poliedro non esiste!

Apriamo una parentesi per esplorare uno spunto significativo (anche se non ci farà fare passi avanti rispetto al problema). Sappiamo che vale la relazione di Eulero, cioè per ogni poliedro (semplicemente connesso, quindi che si possa *gonfiare* a una sfera) si ha che $V-S+F=2$ (dove V, S, F sono rispettivamente i numeri di vertici, spigoli, facce del poliedro). Si può allora pensare che, per giustificare il fatto che questo oggetto che abbiamo in mano non è un poliedro, una via potrebbe essere quella di contarne il numero di vertici, di spigoli e di facce, con la speranza che la relazione di Eulero non sia soddisfatta e si sia quindi così giustificato che l'oggetto non è un poliedro. Si tratta comunque di una deviazione didatticamente interessante perché il conteggio richiede sistematicità e quindi osservazione della simmetria; inutile aggiungere che è molto più facile, e anche più significativo, seguire questo conto su una figura, o meglio ancora su un modello.

Procediamo: i quadrati sono 6 (quante le facce di un cubo), i triangoli sono 8+6x4 (8 come i vertici di un cubo e inoltre 4 per ciascuno dei sei quadrati), i decagoni sono 12 (quanti gli spigoli di un cubo). Quindi F=6+32+12=50.

I vertici in cui arrivano due decagoni e un triangolo sono 48=24+24 (3 per ciascuno degli 8 triangoli isolati e altri quattro per ciascuna *punta* dei 6 gruppi costituiti da un quadrato e 4 triangoli); i vertici in cui arrivano un decagono, due triangoli e un quadrato sono 24 (4 per ciascuno dei 6 gruppi suddetti). Non ci sono altri tipi di vertici, quindi V= 48+24=72.

Gli spigoli sono di tre tipi: o adiacenti a un quadrato e a un triangolo (e ce ne sono 6x4=24), o adiacenti a un triangolo e a un decagono (e ce ne sono 3 per ciascuno degli 8 triangoli *isolati* e 8 per ciascuno dei 6 gruppi contenenti i quadrati), oppure adiacenti a due decagoni. Questi ultimi sono 24=(12 x 4)/2 (se ne contano 4 per ogni decagono, ma in questo modo li abbiamo contati due volte); quindi in totale S=24+72+24=120.

Allora il numero di Eulero è V-S+F=72-120+50 = 2, come deve essere. La relazione di Eulero, quindi, non ci è servita a nulla, e, in realtà, potevamo dirlo subito ed evitare quindi questo conteggio! Infatti, la caratteristica di Eulero è un invariante topologico e non si accorge quindi di *piccole deformazioni*" Dicendo che il poliedro costruito dal ragazzino non esiste, ci riferiamo al poliedro costituito da triangoli equilateri, decagoni regolari e quadrati, ma la costruzione con le tessere del Polydron che si tiene in mano ci dà comunque un esempio di un oggetto in cui magari i decagoni non sono regolari, o addirittura non sono piani; questo oggetto non è necessariamente un poliedro, ma ne è comunque una deformazione topologica (immaginiamo di gonfiarlo su un palloncino) e sappiamo quindi a priori, anche prima di fare il conto, che vale la relazione di Eulero V-S+F=2.

C'è un altro bel risultato che si potrebbe pensare di utilizzare; è un risultato che richiama, nel caso dei poliedri, il teorema dell'angolo esterno per i poligoni (ovvero il teorema che garantisce che, per ogni poligono piano, la somma degli angoli esterni vale 2π). In maniera analoga si può dire che, per un qualsiasi poliedro (semplicemente connesso, cioè che si può gonfiare a una sfera) il *difetto angolare totale* del poliedro vale 4π. Il difetto angolare totale è la somma dei difetti angolari del poliedro in tutti i suoi vertici; e il difetto angolare di un poliedro in un suo vertice v rappresenta quanto il poliedro non è piatto in v ovvero la differenza tra l'angolo giro 2π e la somma degli angoli delle facce che arrivano nel vertice v; se poi il poliedro non è convesso e v è un vertice per cui la somma degli angoli delle facce che vi arrivano è maggiore di 2π (sicché si ha un eccesso angolare) vuol dire che il difetto angolare in v sarà negativo; esattamente come l'angolo esterno di un poligono in un vertice v misura quanto manca affinché il poligono sia piatto in v, ed è negativo nei vertici in cui l'angolo del poligono non è convesso. Per un cubo, il difetto angolare in ogni vertice è $2\pi-3\pi/2=\pi/2$ e quindi il difetto angolare totale vale 4π; e il teorema richiamato garantisce che ciò accade non solo per il cubo ma per qualsiasi poliedro (semplicemente connesso).

Usando questo teorema, possiamo provare a calcolare il difetto angolare totale del *poliedro che non c'è,* sperando di nuovo di ottenere qualcosa di diverso da 4π, in modo da concludere che non si tratta di un poliedro e chiudere così il discorso. Abbiamo già osservato, contando i vertici, che ci sono 48 vertici in cui arrivano due decagoni e un triangolo (e il difetto angolare in questi vertici è quindi $2\pi-4\pi/5-4\pi/5-\pi/3$, cioè $\pi/15$) e 24 vertici in cui arrivano un quadrato, un decagono regolare e due triangoli (e il difetto angolare è quindi $2\pi-4\pi/5-\pi/2-\pi/3-\pi/3$, cioè $\pi/30$). Allora il difetto angolare totale è $48\pi/15+24\pi/30 = 4\pi$; e, in conclusione, anche questo conto non serve per il nostro problema.

In effetti anche questo potevamo dirlo a priori, ed essere sicuri, ancor prima di fare il conto, che il risultato sarebbe stato 4π. Il punto è che si può dimostrare (e non è difficile dimostrarlo: vedi per esempio [1] o [2]) che anche questo teorema sul difetto angolare totale è un risultato topologico, non metrico, anche se questo può apparire sconcertante, dato che si sta parlando di angoli. In generale, per poliedri che non siano necessariamente semplicemente connessi, il difetto angolare totale è il prodotto di 2π per la caratteristica di Eulero, quindi il difetto angolare è del tutto equivalente alla caratteristica. Il che significa che, per il nostro problema, non serve proprio a nulla, anche se ci è servito per una digressione didatticamente significativa: abbiamo toccato un fatto che si enuncia in maniera molto semplice, si dimostra in maniera abbastanza semplice e rappresenta un risultato ricco e profondo.

Torniamo però al nostro problema e arriviamo finalmente al punto: come si può *dimostrare* che questo poliedro non esiste? Bisognerà fare i conti, è chiaro; però come? Una difficoltà che si incontra è quella di avere un buon punto di partenza per capire *quali* conti fare: si potrebbe pensare di partire dal cubo e la simmetria dell'oggetto facilmente ci porta su questa strada, che è però una strada ingannevole. Una buona idea può invece essere quella di partire da quei *pezzi* del poliedro che sono rigidi e che possiamo ritrovare in altri poliedri noti.

Abbiamo già osservato che ci sono due tipi di vertici, quelli in cui arrivano un decagono, un quadrato e due triangoli e quelli in cui arrivano due decagoni e un triangolo. Questi ultimi, per il semplice motivo che le facce che concorrono nel vertice sono tre, sono rigidi: intendiamo dire con questo che, se isoliamo le tre facce che escono da uno di questi vertici, gli angoli diedri fra le facce sono fissati; e, essendo fissati, sono quindi uguali agli angoli diedri tra tali facce in un poliedro di cui conosciamo l'esistenza e che sappiamo costruire, come il poliedro uniforme (3,10,10) (**figura 5**), cioè il poliedro che ha in ogni vertice due decagoni e un triangolo, e che si ottiene smussando i vertici di un dodecaedro regolare.

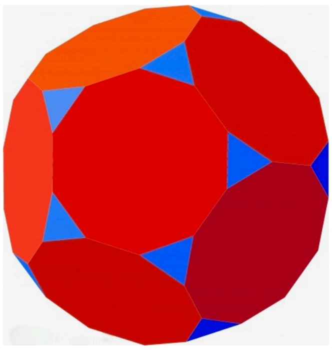

Figura 5

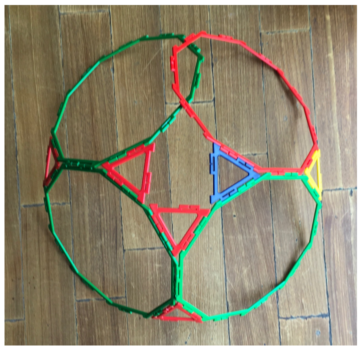

Figura 6

Questo sì che può essere un buon punto di partenza per fare i conti! Prima, però, possiamo esplorare più a fondo questa idea usando di nuovo le tessere del Polydron, ma curando questa volta di evitare tutti i vertici non rigidi, e cominciare a costruire un assemblaggio di poligoni che utilizzi soltanto i vertici rigidi nel *poliedro che non c'è*, quelli in cui arrivano due decagoni e un triangolo: e così spunta una sorpresa (**figura 6**) che rende talmente evidente la soluzione del problema che quasi non c'è più bisogno di fare i conti. Infatti, girando intorno alla posizione dove dovrebbe stare un quadrato, ed evitando di saldare quei 4 vertici che non sono rigidi, ma saldando soltanto quelli intorno, balza all'occhio che quel *buco* che avrebbe dovuto essere un quadrato non è assolutamente un quadrato e che la costruzione andrebbe forzata per poterla chiudere.

Ma allora che cos'era successo prima? Perché sembrava che tutto si chiudesse tranquillamente e senza particolari forzature? Non c'è una risposta univoca, naturalmente, ma a me sembra ragionevole qua rispondere *dando la colpa* alla simmetria: è stata la simmetria a far sì che inseguissimo (consapevolmente o inconsapevolmente) questo poliedro e, costruendolo in maniera da rispettare man mano la simmetria, gli errori e le forzature (che già sono comunque piccoli), vengono ulteriormente suddivisi e diventano impercettibili. Quando invece, come abbiamo fatto ora, distinguiamo fra i vertici dove la situazione è rigida e gli altri e fissiamo soltanto i primi, allora la situazione *esplode* e lo vediamo chiaramente. Quindi la simmetria, oltre a essere uno strumento potente che ci aiuta a organizzare le nostre analisi sistematiche, ci trae anche in inganno perché ci fa vedere cose che non ci sono.

Questa non è certo un'osservazione nuova; si tratta di un fenomeno assai studiato e anche, per esempio, in alcune famose illusioni ottiche ispirate alla teoria della Gestalt si incontrano fenomeni analoghi; spesso è proprio la ricerca della massima simmetria quello che ci spinge a *vedere* una forma che non c'è.

Potremmo chiudere qui la nostra storia, ma, giunti a questo punto, controlliamo il nostro discorso facendo anche qualche conto. Partiamo dal dodecaedro regolare che si ottiene aggiungendo un *tettuccio* a ogni faccia del cubo di vertici $(\pm1,\pm1,\pm1)$. I 20 vertici del dodecaedro sono (oltre agli 8 vertici del cubo) i 12 punti di coordinate (vedi, per esempio [3], e vedi **figura 7**):

$$(\pm\tau,0,\pm(\tau-1)),\qquad (0,\pm(\tau-1),\pm\tau),\qquad (\pm(\tau-1),\pm\tau,0),$$

dove con τ abbiamo indicato il rapporto aureo, cioè

$$\tau=(\sqrt{5}+1)/2.$$

Lo spigolo del dodecaedro ha lunghezza $L=2(\tau-1)$.

Fissiamo una faccia, per esempio la faccia ABCDE (**figura 8**), sul piano

$$\tau y+z = \tau+1.$$

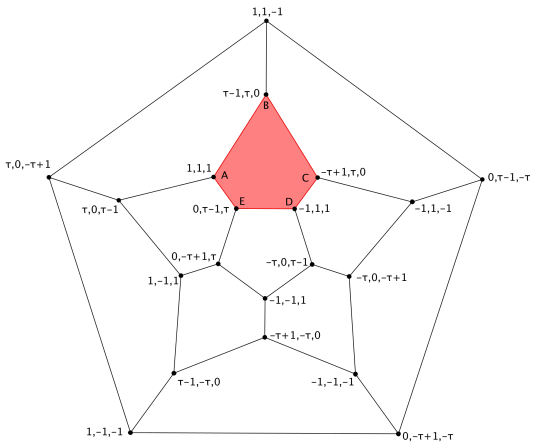

Figura 7

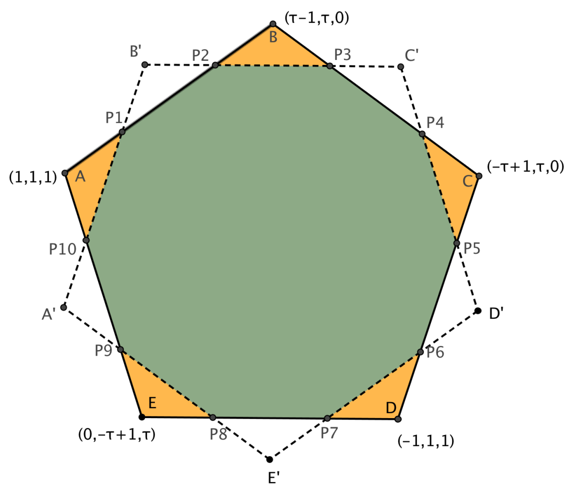

Figura 8

Per ottenere il poliedro uniforme (3, 10, 10) occorre individuare punti P_k come in figura, in maniera tale che il decagono risultante sia regolare e quindi dividere ogni lato del pentagono in tre parti che siano proporzionali alla terna $(1,\tau,1)$.

Se indichiamo con l il lato P_kP_{k+1} del poliedro uniforme risultante, si ha:

$$l = \tau L/(\tau+2) = 2\tau(\tau-1)/(\tau+2) = 2/(\tau+2) = -2\tau/5+6/5,$$

dove in queste uguaglianze si è ripetutamente usato il fatto che il rapporto aureo τ è caratterizzato dalla relazione $\tau^2=\tau+1$.

Facciamo un inciso per entrare un po' più nei dettagli in questi conti: la terza uguaglianza, per esempio, vale perché

$$\tau(\tau-1) = \tau^2-\tau = (\tau+1)-\tau = 1.$$

Per giustificare la validità della quarta uguaglianza occorre trovare due numeri A e B tali che

$$2/(\tau+2) = A\tau+B$$

(stiamo qui usando un risultato potente, cioè il fatto che il reciproco di ogni numero del tipo $k\tau+h$, con k e h numeri razionali, non entrambi nulli, è ancora un numero di questo tipo).

Esplicitando si ottiene:

$$(\tau +2)(A\tau+B) = A\tau^2 + 2A\tau + B\tau + 2B =$$

$$= A\tau + A + 2A\tau + B\tau + 2B = (3A+B)\tau + (A+2B).$$

Usiamo ora un altro potente risultato, e cioè il fatto che ogni numero del tipo $k\tau+h$ (con h e k numeri razionali) si esprime in un unico modo in questa forma (cioè non è possibile trovare un'altra coppia di razionali k' e h', diversi da k e h, tali che $k'\tau+h' =k\tau+h$).

Allora dall'uguaglianza

$$(3A+B)\tau + (A+2B) = 2$$

si ricava un sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$3A+B=0,$$
$$A+2B=2,$$

la cui soluzione (unica) è effettivamente $A=-2/5$ e $B=6/5$, giustificando così l'uguaglianza

$$2/(\tau+2) = -2\tau/5+6/5.$$

Confrontiamo ora il (3,10,10) con il *poliedro che non c'è*; o, meglio, con quelle parti del *poliedro che non c'è* che possiamo assemblare senza rischio di ambiguità perché usiamo soltanto vertici rigidi (vedi **figura 6**): il conto che vogliamo fare riguarda quel *buco* che dovrebbe essere un quadrato e che quadrato non è. Fissiamo un decagono del *poliedro che non c'è* e consideriamo i triangoli ad esso adiacenti (**figura 9**).

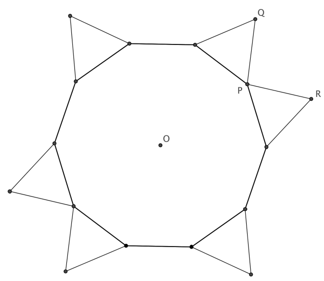

Figura 9

Chiamiamo Q e R il terzo vertice, rispettivamente, di una delle due coppie di triangoli equilateri che sono adiacenti al decagono lungo due lati consecutivi (in figura li abbiamo appiattiti sul piano della faccia decagonale). Per far vedere che il buco non è quadrato basta controllare che

$$QR^2 \neq 2l^2.$$

Identificando questo decagono al decagono in figura 8 del (3,10,10), uno dei due punti Q e R (per esempio Q) si può immaginare come uno dei vertici di tale (3,10,10); riferendoci alla **figura 7**, Q può essere scelto sul lato BF (dove F è il terzo vertice adiacente a B, oltre a A e C), in maniera tale che $QB=BF/(\tau+2)$.

$B=(\tau-1,\tau,0)$, $F=(1,1,-1)$ e, con un po' di algebra lineare e qualche conto analogo a quello che abbiamo prima svolto esplicitamente, si ottiene $Q = (\tau/5+2/5,\ 2\tau/5+4/5,\ \tau/5-3/5)$.

Non possiamo fare la stessa cosa per l'altro punto R, che non si ritrova fra i vertici dello stesso poliedro (3,10, 10). Abbiamo però varie vie per ottenerne le coordinate e quindi la distanza QR che ci interessa.

Si può per esempio osservare che i due triangoli in questione (che hanno un lato in comune col decagono e il vertice opposto rispettivamente Q e R) si ottengono l'uno dall'altro tramite una rotazione di $\pi/5$ intorno alla retta r che è ortogonale alla faccia $ABCDE$ e passa per il suo centro O. Sul piano α (parallelo alla faccia $ABCDE$, perpendicolare a r e passante per i punti Q e R), i punti Q e R differiscono per una rotazione di angolo $\pi/5$ e di centro il punto H in cui la retta r interseca α.

r è la retta di equazioni parametriche $(0,\tau t,t)$; α è il piano di equazione $\tau y+z = \tau(2\tau/5+4/5) + (\tau/5-3/5) = (7\tau/5-1/5)$; quindi il punto H ha coordinate $H=(0,\tau/5+3/5,3\tau/5-2/5)$. Sul piano α, H è il centro di una rotazione di $\pi/5$ che manda Q in R, quindi nel triangolo isoscele HQR sappiamo che

$$HQ=HR=\tau QR.$$

Conosciamo le coordinate di H e di Q, quindi possiamo calcolare HQ^2 trovando:

$$HQ^2 = 16\tau/25+12/25$$

La quantità che ci interessa è QR^2 e si ha

$$QR^2 = HQ^2/\tau^2 = HQ^2/(\tau+1) = 4\tau/25+8/25 \approx 0{,}579$$

Il nostro obiettivo era controllare che $(QR)^2$ fosse diverso da $2l^2$.
In effetti

$$2l^2 = 2(-2\tau/5+6/5)^2 = -8\tau/5+16/5 \approx 0{,}611.$$

Constatiamo quindi non solo che queste due quantità sono differenti, ma anche che lo sono per *poco*, che è in effetti quanto dovevamo aspettarci dal contesto.

La conclusione di questa lunga storia è che spesso (non avere troppa fretta e) ascoltare gli errori (gli errori dei nostri studenti, ma anche, e ancor di più, i nostri) ci permette di cogliere degli spunti inaspettati, coinvolgenti, e ricchi di significato: una potenzialità da non trascurare!

Ringraziamenti
Per la storia del *poliedro che non c'è* sono debitrice a Sofia Sabatti, che ha assistito alla costruzione da parte del ragazzino e mi ha poi segnalato il problema sull'esistenza o meno del poliedro.

Bibliografia
[1] J. Conway, P. Doyle, J. Gillmann, W.P. Thurston, *Geometry and the imagination in Minneapolis*; liberamente scaricabile da https://arxiv.org/abs/1804.03055
[2] M. Dedò, *Geometrie*, Egea, Milano 2018
[3] M. Dedò, *Forme*, Decibel-Zanichelli, Padova, 1999