

Da:

Serge LANG

La bellezza della matematica

Bollati Boringhieri

pagg 133-156

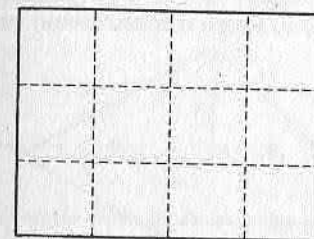
Prima lezione

Che cos'è pi greco?

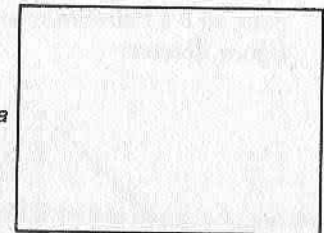
Questa lezione è stata tenuta in una scuola secondaria alla periferia di Toronto nell'aprile del 1982 a una classe di studenti di circa 15 anni.

LANG Mi chiamo Serge Lang. Insegno a Yale, ma oggi sono venuto qui a fare un po' di matematica con voi.

Studieremo l'area di alcune figure geometriche semplici, come rettangoli, triangoli e cerchi, di cui avrete certamente parlato nel corso di matematica. Cominciamo col rettangolo. Supponiamo che l'area di un rettangolo sia il prodotto della base per l'altezza, così se i lati hanno una lunghezza a e b , allora l'area del rettangolo è ab . Ad esempio, se un rettangolo ha i lati di 3 cm e 4 cm, allora l'area è di 12 cm². Potete controllare sulla figura:

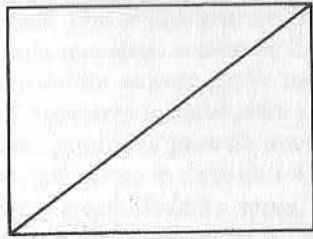


4 cm
Area = 12 cm²



a
 b
Area = ba

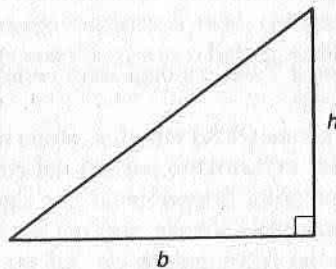
Se tagliate un rettangolo a metà, così:



ottenete un triangolo rettangolo, così l'area del triangolo rettangolo è la metà del prodotto della base per l'altezza. Possiamo scrivere:

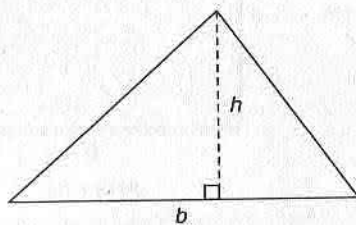
$$\text{area del triangolo rettangolo} = \frac{1}{2} bh,$$

dove b è la base e h l'altezza.

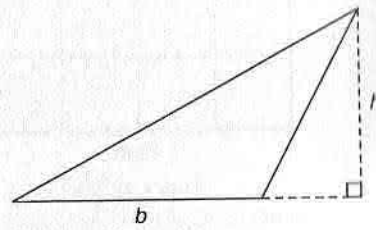


$$\text{Area} = \frac{1}{2} bh$$

Dovreste anche sapere che questa formula vale per qualsiasi triangolo, se h è l'altezza relativa alla base b . Posso dimostrarvelo su due figure diverse:

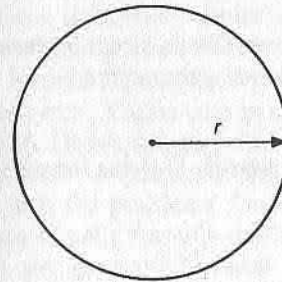


$$\text{Area} = \frac{1}{2} bh$$



$$\text{Area} = \frac{1}{2} bh$$

Cercate di dimostrare la formula da soli, perché voglio avere tempo per discutere qualcosa di più interessante, il cerchio.¹
Allora, supponiamo che voi sappiate tutto sull'area di un triangolo e prendiamo un cerchio di raggio r .



Sapete qual è la formula per l'area del cerchio?

UNO STUDENTE È pi greco r al quadrato.

LANG Esatto. È πr^2 . Bene, che cos'è pi greco?

LO STUDENTE 3,14.

LANG Tu sostieni che è 3,14. È l'espressione esatta?

LO STUDENTE No, penso di no. Veramente, il numero continua.

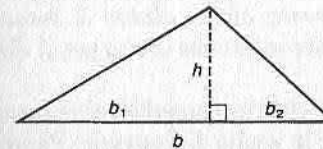
LANG Benissimo. Allora noi mettiamo dei puntini, così: 3,14..., per indicare che il numero continua. Sapete come continua?

(Gli studenti rispondono in modi diversi).

LANG Non è così ovvio. È un problema decidere come continua. Voglio sapere come lo calcolate.

UNO STUDENTE Si misura il perimetro del cerchio e si divide per il doppio del raggio.

¹ Do la dimostrazione per la prima figura. Da un vertice si tracci l'altezza perpendicolare al lato opposto come in questa figura:



Il triangolo viene così diviso in due triangoli rettangoli, le cui basi sono b_1 e b_2 , così che $b_1 + b_2 = b$. I due triangoli rettangoli hanno la stessa altezza h . Allora, usando la formula per l'area di un triangolo rettangolo, abbiamo:

$$\text{area del triangolo} = b_1 h + b_2 h = (b_1 + b_2) h = bh.$$

Questo dimostra la formula per la prima figura. Procedete per la seconda figura in modo simile. Dovrete fare una sottrazione anziché un'addizione.

LANG Ah, ora mi stai dicendo qualcosa in più. Invece che perimetro, chiamiamolo circonferenza. Ok. Prima mi hai detto che l'area è πr^2 e adesso parli di circonferenza. Chiamiamo c la circonferenza. E che cosa mi hai appena detto? Hai affermato che

$$c = 2\pi r.$$

Ecco che cosa hai detto: $2r$ è il diametro, così la circonferenza è π volte il diametro, e allora possiamo anche scrivere

$$c = \pi d,$$

dove d è il diametro, $d = 2r$. Ma adesso guarda. Hai due formule, una per l'area e una per la circonferenza:

$$\pi r^2 \quad \text{e} \quad 2\pi r.$$

A proposito, come ti chiami?

STUDENTE Serge.

LANG Oh, Serge, proprio come me! Serge ha detto che per calcolare π si considera la circonferenza e si divide per il diametro. La circonferenza è qualcosa che puoi misurare. Prendi un metro, lo fai girare intorno a una padella e ne misuri la circonferenza. Poi misuri il diametro con una riga e dividi. Con questo metodo puoi raggiungere un'accuratezza di un decimale o due al massimo, se sei preciso. Ottieni così un certo valore, che è un'approssimazione di π .

Sarebbe assai più difficile tentare di misurare l'area per ottenere un valore approssimato di π .

Ora il problema è: avete queste due formule, una per l'area e una per la circonferenza, ma come fate a sapere che queste due formule sono vere?

(Silenzio, sguardi interrogativi).

LANG Come le dimostrate? Qualcuno di voi ha mai affrontato il problema di come si dimostrano queste formule? Mai? Le avete solo imparate a memoria.

(La maggior parte risponde negativamente; alcuni alzano la mano).

SERGE Si può dire che π è uguale alla circonferenza divisa per il diametro e poi si fa il calcolo.

LANG Il calcolo di che cosa? Mi hai solo ripetuto una delle due formule. Tu hai due formule. Supponiamo che io voglia dimostrarle. Per dimostrarle devo iniziare da qualcosa e arrivare alle formule con un procedimento logico. Da che cosa comincio?

SERGE Si comincia da dove si divide la circonferenza per il diametro, il che è uguale a π .

LANG E poi? Ora devi arrivare all'area. Qual è la definizione di π ? Prima di poter dimostrare qualcosa, devi avere una definizione.

SERGE È quella che ho detto, la circonferenza diviso il diametro.

LANG Ma allora devi dimostrare che è lo stesso π della formula per l'area.

Se mi dici che π è la circonferenza diviso il diametro, che è due volte il raggio, puoi cominciare con questo come definizione, ma poi devi dimostrare qualcosa, cioè l'altra formula.²

Allora, dobbiamo cominciare da qualcosa, con una definizione, altrimenti non possiamo dimostrare niente. E poi, a fil di logica, derivare le formule. Dunque, il problema è: da dove iniziamo? Ecco quello che cerco. Voglio cominciare da qualcosa e arrivare a quelle due formule. Dovrò spiegare due cose su queste formule. Una è da che cosa deriva r^2 ; e l'altra, da che cosa deriva π . Si riferiscono a due diversi aspetti del problema. Uno ha a che vedere con r^2 . Perché mai compare r^2 nelle formule dell'area? E perché invece abbiamo r (ma non r^2) per la circonferenza? La presenza di r e di r^2 dovrà essere discussa. E l'altra cosa che dovrò discutere è π . Allora ricominciamo da capo. Per prima cosa spiegherò r^2 e poi π .

Torniamo pure al caso più semplice del rettangolo. Supponiamo di avere un rettangolo con lati a , b . L'area del rettangolo è appunto il prodotto di a per b . Ora, supponiamo di prendere un rettangolo i cui lati siano il doppio di a e il doppio di b , e ingrandire quindi il rettangolo di un fattore 2. Come cambia l'area?

UNO STUDENTE Raddoppia.

LANG Come ti chiami?

LO STUDENTE Adolph.

LANG L'area raddoppia? Qual è l'area del nuovo rettangolo? (Un altro prende la parola).

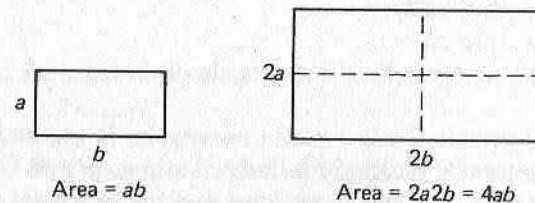
LANG No. Sto parlando con Adolph. L'area del rettangolo è il prodotto dei lati. Giusto?

ADOLPH Sì.

LANG Un lato del nuovo rettangolo è $2a$, quant'è l'altro?

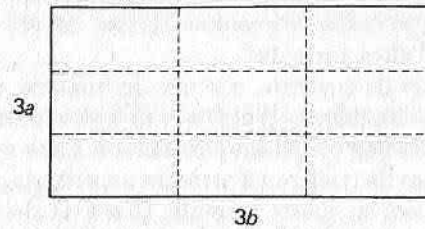
ADOLPH È $2b$.

LANG Bene, allora l'area totale è $2a$ per $2b$, cioè $4ab$.



² Si deve anche dimostrare che qualsiasi cerchio si consideri, il rapporto tra circonferenza e diametro è costante. Questa è precisamente una delle cose che cerchiamo di dimostrare. Seguivo un altro ragionamento, e quindi non ho sollevato questa obiezione esplicitamente.

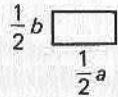
Ora supponiamo di prendere un rettangolo con lati lunghi il triplo, cioè $3a$ e $3b$.



Quant'è l'area di questo rettangolo?

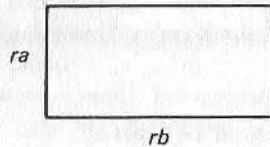
ADOLPH $9ab$.

LANG Giusto, $9ab$, è $3a$ per $3b$, cioè $9ab$. Supponiamo ora di prendere un rettangolo con lati lunghi la metà, avrò $(1/2)a$ e $(1/2)b$. Quant'è l'area di questo rettangolo?



ADOLPH È ab diviso 4.

LANG Giusto. Un quarto di ab . Ora supponiamo in generale di prendere un rettangolo con lati ra e rb . Come questo:



Quant'è l'area di questo rettangolo?

ADOLPH ra per rb .

LANG Giusto, ra per rb , e cioè?

ADOLPH r al quadrato per ab .

LANG Sì, r^2ab . Allora, se ingrandisco il rettangolo di un fattore r , come cambia l'area?

Mi spiego meglio: prendo il mio vecchio rettangolo, lo ingrandisco di un fattore r in entrambe le direzioni. I nuovi lati sono ra e rb . Come cambia l'area? La vecchia area era ab ; qual è la nuova area?

ADOLPH r quadro ab .

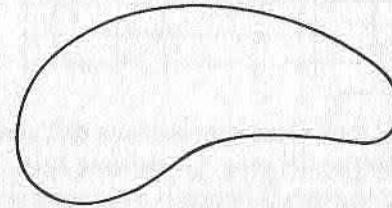
LANG Sì, r^2ab , non rab . Di quale fattore cambia allora l'area?

ADOLPH Di r^2 .

LANG Poco fa sostenevi che l'area cambia di un fattore r . Ti sbagliavi. L'area cambia di un fattore r^2 . Hai capito? Hanno capito tutti? (La classe fa segno di sì).

LANG Allora, se io applico un ingrandimento di un fattore r , l'area del rettangolo cambia di un fattore r^2 . E naturalmente r può essere maggiore, ma anche minore di 1, come $r = 1/2$ o $r = 1/3$. Dunque, ora sappiamo come cambia l'area per i rettangoli. Ci sono domande? È chiaro per tutti? (Nessuna domanda).

Bene, ora, invece di un rettangolo, consideriamo un'altra figura. Supponiamo di avere una figura delimitata da una curva, come questa:

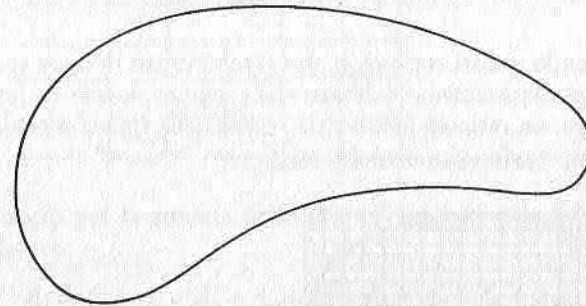


Proprio come un rene. Supponiamo di avere un rene che abbia una certa area A . Se ingrandisco il rene di un fattore 2, ad esempio, quanto sarà l'area del nuovo rene?

UNO STUDENTE A^2 ?

LANG No. Torniamo indietro. Ho un rettangolo di area A e lo ingrandisco di un fattore 2. Qual è la sua nuova area?

UNO STUDENTE È $4A$.



LANG Sì, l'area cambia di 2 al quadrato. Se ingrandisco il rettangolo di un fattore r , l'area cambia di un fattore r^2 . Supponiamo di ingrandire una figura diversa di un fattore 2. Di quale fattore cambierà l'area?

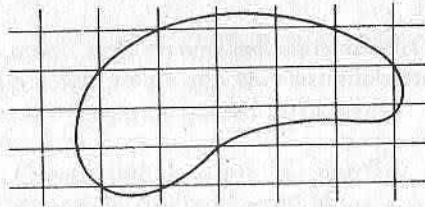
UNO STUDENTE 4.

LANG Bene, l'area cambia proprio di questo fattore 4. Perché? Come

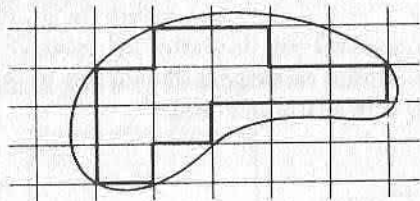
si dimostra? Ho una figura delimitata da una curva, un rene, non un rettangolo. Come lo dimostro? Avete delle idee?

ADOLPH Sì misura tutt'intorno.

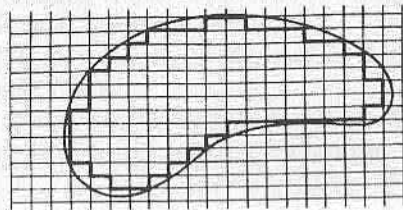
LANG No, non si determina l'area misurando la figura tutt'intorno. Così otterrei il perimetro, la circonferenza. Ci stiamo occupando dell'area, della parte interna. Cercherò di ricondurre la questione a rettangoli. Disegno un reticolo come questo:



Osservate il reticolo. L'area del rene viene approssimata dall'area dei rettangoli che si trovano all'interno del rene. Guardiamo tutti i rettangoli che stanno completamente entro la figura. (Lang traccia la linea spessa della figura seguente). Ecco, tutti quelli delimitati dalla linea spezzata che ho evidenziato.



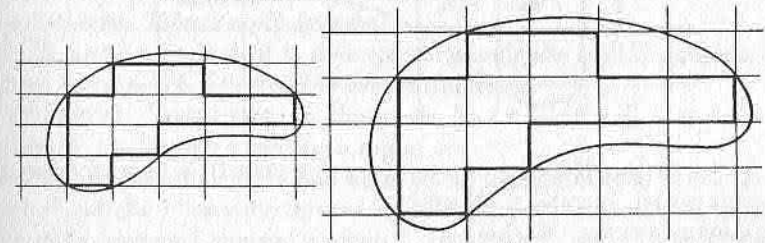
Allora, se prendo questi rettangoli che stanno entro la linea spessa, ottengo un'approssimazione dell'area del rene per mezzo di rettangoli. Se disegno un reticolo molto fitto, come nella figura successiva, ottengo un'approssimazione anche migliore.



Vedete tutti questi piccoli rettangoli all'interno della linea spessa? Se io faccio la somma di questi piccoli rettangoli, la somma delle aree

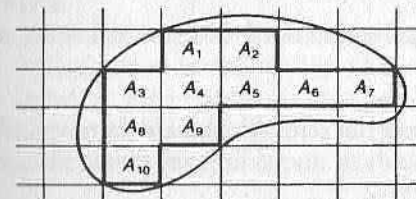
di questi rettangolini, ottengo una buona approssimazione dell'area del rene.

Ora ingrandisco tutta la figura di un certo fattore r . Applico cioè una dilatazione, un'espansione, oppure una contrazione, di un certo fattore r . Allora anche i rettangoli si modificano di conseguenza. Ad esempio, se r è maggiore di 1, allora un rettangolo nel primo disegno si trasforma in un rettangolo più grande.



UNO STUDENTE Sì, se si ingrandiscono i rettangoli all'interno del rene di un fattore 2, allora l'area dei rettangoli ingranditi sarà quattro volte la vecchia area.

LANG Giusto. E se si ingrandisce di un fattore r , l'area dei nuovi rettangoli sarà r^2 volte l'area dei vecchi rettangoli. È chiaro? Guardate tutti i rettangoli qui, come in questa figura, c'è un primo rettangolo, un secondo, un terzo e così via, con rispettive aree $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$; assegno così un numero corrispondente all'area di ogni rettangolino.



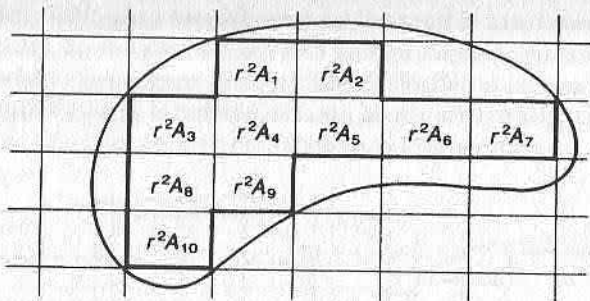
Faccio poi la somma delle aree di tutti i rettangoli che vedete qui dentro:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}.$$

Ho dieci aree. Questa somma approssima l'area del rene. Giusto? Ora faccio un ingrandimento di tutta la situazione, come per una fotografia, di un fattore... di quello che volete. Che cosa volete: 2 oppure volete r ? Volete un numero specifico, oppure posso usare r ?

MOLTI STUDENTI r . Può usare r .

LANG Posso usare r . Bene. Applico un ingrandimento di un fattore r .



Ora se uno di questi rettangoli ha una superficie di area A , come ha detto lei, — come ti chiami?

LA STUDENTESSA Rachel.

LANG Rachel. Come ha detto Rachel, l'area del rettangolo dilatato sarà r^2A . Così, se ho un rettangolo di area A , dall'altra parte avrò un rettangolo di area r^2A . Quale sarà la somma di tutti i rettangoli ingranditi? Sarà:

$$r^2A_1 + r^2A_2 + r^2A_3 + \text{fino a } r^2A_{10}.$$

RACHEL Sì.

LANG Se raccolgo il fattore r^2 , avrò r^2 davanti che moltiplica la somma delle aree, in questo modo:

$$r^2(A_1 + A_2 + \text{fino a } A_{10}).$$

Ma $A_1 + A_2 + \dots + A_{10}$ è un'approssimazione dell'area del rene, e

$$r^2(A_1 + A_2 + \dots + A_{10})$$

è un'approssimazione dell'area del rene dilatata del fattore r , allora questa è un'approssimazione della nuova area, che vale r^2 volte la vecchia area.

Ora se traccio un reticolo molto fitto, l'area dei rettangoli all'interno del rene si avvicina sempre più all'area di quest'ultimo. Ecco la ragione per la quale anche l'area del rene cambia di un fattore r^2 . Capite il ragionamento? Non proprio?

UNO STUDENTE Pressappoco.

LANG Pressappoco... Avete capito il ragionamento sui rettangoli? Se ingrandisco ogni rettangolo di un fattore r , la sua area cambia di un fattore r^2 . Vedete che si può approssimare la figura curva con rettangoli? Come viene approssimata la figura curva coi rettangoli?

RACHEL Sommando l'area dei rettangolini.

LANG Giusto. Prima disegno un reticolo, poi sommo tutte le aree dei rettangolini. E questo mi dà una buona approssimazione dell'area del rene. Poi ingrandisco tutta la figura di un fattore r . Ogni rettangolino viene ingrandito di un fattore r , e l'area di ogni rettangolo cambia di un fattore r^2 , così anche la loro somma cambia di un fattore r^2 . Posso affermare che questo è un ragionamento che spiega perché anche l'area della figura curva cambierà di un fattore r^2 . Va bene? Ci sono commenti? (Alcuni studenti discutono la questione).

UNO STUDENTE Diventa più grande?

LANG Sì, se r è maggiore di 1, diventa più grande. Se r è $1/2$ diminuirà di un fattore $1/4$. D'accordo? Avete obiezioni?

UNO STUDENTE Vorrei fare una domanda. Se r è minore di 1, si ridurrebbe di un fattore r elevato a meno 2?

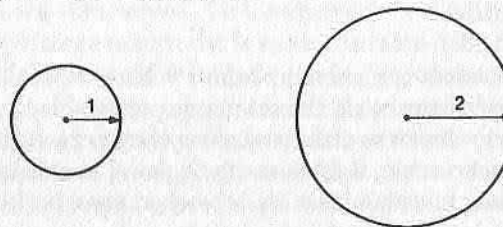
LANG No. Se r è minore di 1, allora avresti l'ingrandimento di un fattore r^2 , perché r^2 sarebbe minore di 1. Puoi scrivere r come un qualche altro numero s elevato a meno 1, cioè $r = s^{-1}$, così r^2 è s elevato a meno 2, cioè $r^2 = s^{-2}$. Moltiplicando per r^2 allora si ha veramente un rimpicciolimento di un fattore minore di 1.

UNO STUDENTE Allora non è un vero ingrandimento.

LANG È vero, usiamo una parola neutra, chiamiamolo una *omotetia*, che è il termine specifico per indicare la dilatazione o la contrazione attorno a un punto. Se r è uguale a 2 o 3, l'omotetia aumenta l'area. Se r è $1/2$, allora l'area cambia di un fattore $1/4$, il che è un rimpicciolimento. Allora usiamo il termine neutro, omotetia. Il nostro ragionamento è basato sull'approssimazione di una figura con dei rettangoli. Possiamo concludere che con una omotetia di un fattore r , l'area cambia di un fattore r^2 .

Posso andare avanti? Posso cancellare? Sì? Bene.

Continuiamo e torniamo al cerchio, che va molto meglio del rene. È curvo, sì, ma è meglio del rene perché la curva è più regolare. Prendiamo un cerchio di raggio 1. Come ottengo un cerchio di raggio 2 dal cerchio di raggio 1?



UNO STUDENTE Si aumenta il raggio di 1.

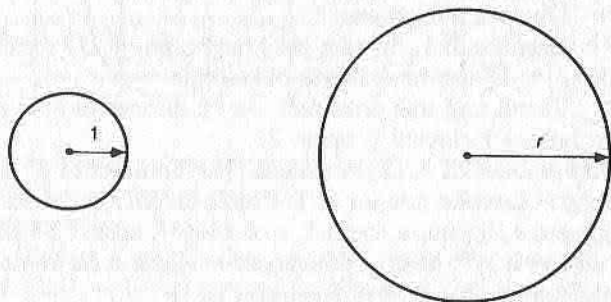
LANG Di un fattore 1 o di un fattore 2? Scegliamo un altro raggio. Come si ottiene un cerchio di raggio 10 dal cerchio di raggio 1?

STUDENTE L'ha aumentato di un fattore 10.

LANG L'ho aumentato di un fattore 10. E, in generale, se voglio un cerchio di raggio r , come ottengo il cerchio di raggio r dal cerchio di raggio 1?

STUDENTE Lo aumenta di un fattore r .

LANG Di un fattore r . Va bene? Così posso dire che un cerchio di raggio r è l'omotetia, di un fattore r , di un cerchio di raggio 1.



E il cerchio di raggio $1/2$ è l'omotetia del cerchio di raggio 1 di un fattore $1/2$. Ora, supponiamo di conoscere l'area di un cerchio di raggio 1. Quanto sarà l'area di un cerchio di raggio 2? Sia A l'area del cerchio di raggio 1. Qual è l'area del cerchio di raggio 2?

STUDENTE $4A$.

LANG Giusto! Come ti chiami?

STUDENTE Ho.

LANG Ho. Bravo. $4A$. E quant'è l'area del cerchio di raggio 10?

UN ALTRO STUDENTE $100A$.

LANG E l'area di un cerchio di raggio $1/2$? Rachel.

RACHEL Un quarto A .

LANG Giusto. E quant'è l'area del cerchio di raggio r ?

RACHEL r^2 ?

LANG r^2 ? (*Interrogativo*).

RACHEL r^2A .

LANG r^2A . Bene, ora, vedete che entra in ballo r^2 ? Ecco r^2 . A proposito, c'è una certa confusione su ciò che si intende per cerchio. Il perimetro del cerchio è ciò che viene chiamato *circonferenza*. Se vogliamo intendere l'interno del cerchio, dobbiamo distinguere, lo chiamiamo *disco*. Come un frisbee. Lo chiamiamo disco perché i greci lo chiamavano così. Se i greci lo avessero chiamato frisbee, l'avremmo chiamato così anche noi.

Dunque, possiamo dire che l'area di un disco di raggio r è r^2A , dove A è l'area di un disco di raggio 1. Bene, dobbiamo dare un nome all'area

del disco di raggio 1, e la chiameremo pi greco. Così definisco π come l'area di un disco di raggio 1. Per i nostri scopi oggi, supporremo che π sia quel numero. Naturalmente supponiamo anche di dare delle unità di misura, quelle che vogliamo. Questa sarà la definizione di π : l'area del disco di raggio 1.

Detto ciò, e per quanto abbiamo visto prima, l'area del disco di raggio r è πr^2 . Prima abbiamo chiamato A l'area del disco di raggio 1. Ora la chiamiamo π . Questa è la costante. E abbiamo spiegato r^2 , iniziando con questa definizione di π . Questo spiega una delle nostre formule. Ok? Domande? Posso andare avanti? (*Nessuna domanda*). Così torniamo al nostro problema originario, che ha sollevato due questioni. L'area di un disco, e la circonferenza del cerchio. Ci siamo occupati dell'area. Ci rimane la circonferenza. Il teorema è:

Teorema La circonferenza di un cerchio di raggio r è $2\pi r$.

Questo è il teorema. Chiamiamo la circonferenza c . Abbiamo cominciato con una definizione di π , abbiamo ottenuto πr^2 , e ora vogliamo dimostrare che

$$c = 2\pi r.$$

Ecco che cosa voglio fare: trattare sistematicamente le formule πr^2 e $2\pi r$. Va bene? Nessuna protesta?

UNO STUDENTE Nessuna protesta.

UN ALTRO Non ancora!

SERGE Perché considera il raggio e non il diametro?

LANG Avrei potuto scrivere la formula $c = \pi d$, dove d è il diametro.

STUDENTE Perché il diametro? Come si sa che è $2r$?

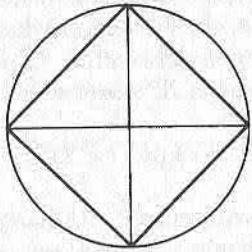
LANG Non si sa. È proprio quello che intendo dimostrare! Sto facendo un'asserzione; non l'ho ancora dimostrata. Questo è il punto cruciale dell'operazione: dimostrare che questa è la formula giusta. Non l'ho ancora dimostrato. Ora comincerà la dimostrazione. Comunque è importante notare che la stessa costante della formula dell'area, comparirà anche nella formula per la circonferenza, proprio nello stesso modo. E questo è precisamente il contenuto del teorema; cioè il fatto che essa compaia nella formula esattamente in questo modo: la circonferenza è πd , pi greco volte il diametro.

Non c'è ragione perché sia così. Sarebbe potuta essere in qualsiasi altro modo. Se è così, non date la colpa a me. Dio l'ha fatta in questo modo! Non son io che decido. È stato stabilito da qualcun altro. Ma mi domandate perché, e io vi risponderò. Ecco che cosa significa la parola «dimostrazione». Allora scrivo la parola: *Dimostrazione*.

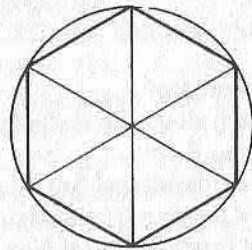
E ora otterrò la dimostrazione. Tu come ti chiami?

STUDENTESSA Sheryl.

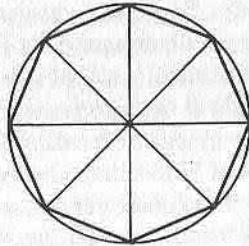
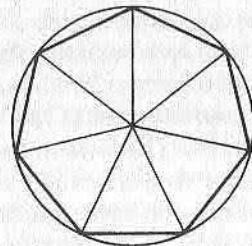
LANG Sheryl chiede perché. Anche Serge chiede perché. E io risponderò. Quale metodo dovrò usare? Userò di nuovo il metodo dell'approssimazione. Dato che le uniche cose che siamo certi di sapere sono l'area del rettangolo e l'area del triangolo, lavoreremo proprio con queste cose. Prendo il mio cerchio di raggio r e ne costruisco un'approssimazione per mezzo di triangoli. Iniziamo usando quattro triangoli, così:



Osservate i quattro triangoli. È un'approssimazione molto rozza, non particolarmente buona. Posso allora provare con un maggior numero di triangoli, sei, ad esempio.



Ma posso usarne anche sette, oppure otto:

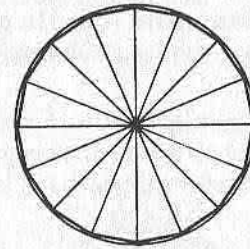


o più ancora e si ottiene un'approssimazione sempre migliore. Avete mai sentito parlare di poligoni regolari? Sì, bene. Dunque, approssimo il cerchio con dei poligoni. Il primo poligono che ho usato era un quadrato, cioè un poligono regolare con quattro lati. Se un poligono regolare ha sei lati, sapete come si chiama?

UNO STUDENTE Esagono.

LANG Bene. Un esagono. Sto solo controllando quel che sapete già. Dunque, qui abbiamo i quattro triangoli, poi i sei triangoli, i sette triangoli e così via; naturalmente posso prenderne un numero a piacere. Tanti più lati avranno i poligoni presi in considerazione, tanto migliore sarà l'approssimazione del cerchio. Giusto?

Ne disegno ora uno di n lati, con n arbitrario.



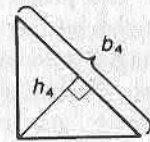
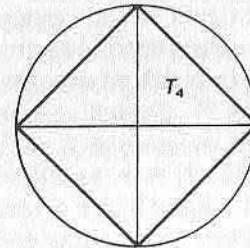
Sapete qualcosa su n ?

UNO STUDENTE È un numero qualsiasi.

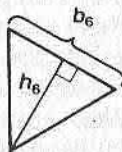
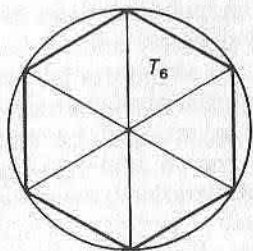
LANG Sì. Non voglio trattare solo casi specifici, voglio potermi render conto della situazione generale. Così uso n . Vi sto annoiando?

UNO STUDENTE No.

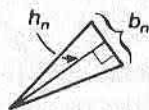
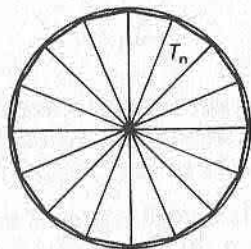
LANG Ok. Questo è il metodo. Approssimo il cerchio con poligoni regolari e l'area viene così approssimata da triangoli e la circonferenza del cerchio dal perimetro del poligono. Col quadrato (un dato triangolo ripetuto quattro volte) l'approssimazione non è granché. Nella figura seguente il triangolo viene ripetuto sei volte, e là sette volte. Bene? Diamo un nome al triangolo per ogni caso considerato. Per esempio, il primo lo chiamo T_4 . Il numero 4 indica che ci sono quattro triangoli. La base la chiamo b_4 e l'altezza h_4 . Il triangolo T_4 viene ripetuto quattro volte.



Poi ho il triangolo T_6 , con base b_6 e altezza h_6 . Il triangolo T_6 viene ripetuto sei volte.



Lassù avevo il triangolo T_7 che viene ripetuto sette volte. In generale, ho il triangolo T_n , che viene ripetuto n volte. La sua base sarà b_n e l'altezza h_n .



Qual è l'area di T_4 ? Quanto vale l'area di un triangolo?

SHERYL Un mezzo b_n per h_n .

LANG Vai avanti troppo in fretta. Andiamo piano perché tutti capiscano.

L'area di T_4 è $(1/2) b_4 h_4$. Lei mi ha dato la risposta generale. Procediamo passo per passo. Qual è l'area di T_6 ?

UNO STUDENTE Un mezzo b_6 per h_6 .

LANG Sì, e quant'è l'area di T_7 ? È $(1/2) b_7 h_7$. E infine quant'è l'area di T_n ? Sheryl me l'ha già detta.

UNO STUDENTE Un mezzo b_n per h_n .

LANG Giusto. Ora posso lasciare soltanto la figura con n e cancellare le altre, perché ho bisogno di spazio. Ho considerato le figure con 4, 6, 7 triangoli solo per arrivare a n , ma in realtà mi occorre solo quest'ultimo. Va bene?

Allora, quant'è l'area entro il poligono?

STUDENTE L'area di T_n per n volte.

LANG Giusto. Come ti chiami?

STUDENTE Charlie.

LANG Ecco Charlie ha detto giustamente che l'area all'interno del poligono è n volte l'area di T_n . Cioè n volte $(1/2) b_n h_n$, così possiamo scrivere la formula

$$A_n = n \frac{1}{2} b_n h_n = \frac{1}{2} n b_n h_n.$$

E quant'è la lunghezza del poligono con n lati?

SHERYL n volte b_n .

LANG Giusto. Scriverò quassù la formula:

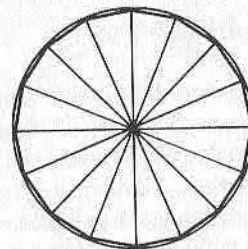
$$L_n = n b_n.$$

Dato che l'area entro il poligono di n lati è: $A_n = (1/2) n b_n h_n$, posso scrivere questo così

$$A_n = \frac{1}{2} L_n h_n,$$

dove L_n è la lunghezza del poligono di n lati.

Supponiamo che n sia un numero molto grande. Aumentando il numero dei lati del poligono, ottengo un'approssimazione migliore del cerchio.



Dopo un po' però non riesco più a disegnare. Quando n è molto grande, a che cosa si avvicina questa quantità $(1/2) L_n h_n$? La lunghezza L_n del poligono si avvicina... a che cosa? Charlie.

CHARLIE Alla circonferenza del cerchio.

LANG Sì. E a che cosa si avvicina l'altezza?

STUDENTE Al raggio.

LANG Molto bene. Come ti chiami?

STUDENTE Joe.

LANG Joe dice che h_n si avvicina al raggio del cerchio quando n diventa un numero molto grande. Siete proprio bravi - Charlie, Joe, Sheryl, Serge,... Rachel... È difficile ricordare tutti i nomi, la prima volta. Allora h_n approssima il raggio. Dunque, nel membro a destra dell'uguaglianza $A_n = (1/2) L_n h_n$, la lunghezza L_n approssima la circonferenza c e h_n il raggio. Nel termine a sinistra l'area A_n del poligono approssima... che cosa? Chiediamolo a qualcun altro.

(Lang indica un altro studente).

STUDENTE pi greco? (Lang fa un viso stupito). No...

LANG Ho un cerchio di raggio r . Abbiamo detto che l'area del cerchio di raggio r è...?

LO STUDENTE πr^2 .

LANG Bene. Allora, il primo membro dell'uguaglianza approssima πr^2 , e il secondo $(1/2) cr$. Perciò avremo:

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} cr.$$

Ora, quale passaggio algebrico potete applicare a questo punto? Charlie.

CHARLIE Sì elidono le r .

LANG Sì, possiamo elidere una r da ambo le parti, una r a sinistra e l' r a destra, così avremo:

$$\pi r = \frac{1}{2} c.$$

Poi che cosa faremo?

CHARLIE Si moltiplica per 2.

LANG Sì, si moltiplica per 2, e che cosa si ottiene?

CHARLIE $2\pi r$ è uguale a c .

LANG Sì $2\pi r = c$, e questa è la formula che volevamo dimostrare. Capito?

Abbiamo cominciato dicendo che πr^2 è l'area del disco di raggio r . Poi abbiamo usato un'approssimazione e calcolato il perimetro e l'area del poligono. Facendo quindi tendere n all'infinito, abbiamo ottenuto un'approssimazione della lunghezza della circonferenza e dell'area entro il cerchio. Il termine a destra si avvicina a $(1/2) cr$; il termine a sinistra si avvicina all'area del disco che è πr^2 . Questo l'abbiamo già dimostrato prima. Poi con un po' di algebra si elide una r e si moltiplica per 2; si ottiene così la formula

$$2\pi r = c.$$

Ecco la vostra formula. Siete convinti che questa è una dimostrazione? (Lang indica Rachel).

RACHEL Sì. (Ma il tono della risposta è incerto).

LANG Davvero?

RACHEL Sì.

LANG Che cosa vuoi dire con «sì»? È un sì dovuto a intimidazione o un sì per convinzione? O un po' di tutt'e due?

RACHEL Un po' di tutt'e due.

LANG Ma dov'è l'intimidazione?

RACHEL Non lo so.

LANG Non lo sai? Bene, facciamo conto che sia solo per convinzione.

Dimmi, da dove abbiamo cominciato? Eri d'accordo che πr^2 è l'area del cerchio di raggio r . Poi che cosa ho fatto?

RACHEL Ha disegnato un cerchio.

LANG Sì, ho disegnato un cerchio. E poi che cosa ho fatto?

RACHEL L'ha diviso in triangoli.

LANG Bene, ho diviso l'interno del cerchio in triangoli. Ho disegnato un poligono regolare entro il cerchio, che ho diviso in triangoli. Poi ho usato la logica e ho considerato un poligono regolare di n lati, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10... e poi in generale, uso n . Va bene? Fin qui non c'è stata intimidazione?

RACHEL Fin qui va bene.

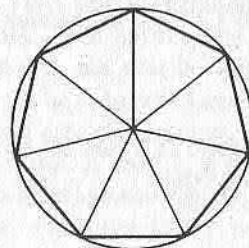
LANG Fin qui va bene. Allora, quant'è l'area di ciascun triangolo?

RACHEL $1/2$ della base per l'altezza.

LANG $1/2$ della base per l'altezza, l'hai detto tu. Allora non è intimidazione.

RACHEL No, è convinzione.

LANG Ne sono lieto. Bene, quant'è l'area entro il poligono? Quanti triangoli ci sono? (Lang disegna una nuova figura).



RACHEL Uno, due, tre, ..., sette, volevo dire n .

LANG Bene, n triangoli. E se ho l'area di ciascun triangolo, e conto n triangoli con questa stessa area, allora quant'è l'area totale entro il poligono?

RACHEL n volte l'area di ciascun triangolo.

LANG Allora l'area entro il poligono è n volte $(1/2) b_n h_n$. Va bene fin qui? Sei convinta?

RACHEL Sì.

LANG Bene. Come procedo ora? $1/2$ è $1/2$, e poi ho preso n volte b_n , cioè n volte quella base. Quant'è la lunghezza del perimetro del poligono? Vedi il poligono? Quanti lati ha?

RACHEL Sette, oh no, scusi, volevo dire n .

LANG Bene, cominci col numero specifico 7, ma poi passi alla considerazione generale e dici n , il che mostra che capisci. Finisci col dire

che ci sono n lati. Ogni lato ha una lunghezza b_n . Allora quant'è la lunghezza del perimetro del poligono?

RACHEL n volte b_n .

LANG Così ottengo nb_n , che è L_n , la lunghezza del poligono di n lati, cioè il perimetro del poligono di n lati. Allora l'area entro il poligono di n lati è:

$$A_n = \frac{1}{2} L_n b_n.$$

Questa è convinzione o intimidazione?

RACHEL È convinzione.

LANG Bene. Ora supponiamo di rendere n sempre più grande per ottenere un'approssimazione del cerchio sempre migliore. Che cosa approssima ognuna di queste quantità? $1/2$ è $1/2$. A che cosa si avvicina la lunghezza L_n del poligono?

RACHEL Alla circonferenza del cerchio.

LANG A che cosa si avvicina b_n ?

RACHEL Al raggio.

LANG Sicuro. Allora il prodotto di queste tre cose si avvicina a un mezzo per la circonferenza per il raggio. Capito? Ci sono domande?

RACHEL No.

LANG È convinzione o intimidazione?

RACHEL Sono convinta!

LANG Bene. Allora ho l'area A_n entro il poligono di n lati nel termine a sinistra dell'uguale, che si avvicina a che cosa?

RACHEL All'area del cerchio.

LANG Che è?

RACHEL πr^2 .

LANG Ok. Così avremo πr^2 uguale a $(1/2) cr$.

RACHEL Fin qui va bene!

LANG Fin qui va bene. Ora se io ho:

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} cr,$$

tu dovresti avere un impulso irresistibile a fare qualcosa a questa equazione. Qual è il tuo impulso irresistibile?

RACHEL Di trasformarla in $2\pi r = c$.

LANG Sì, e come avviene questa trasformazione?

RACHEL Si elide r e poi si moltiplica per 2 ambo i membri e si ottiene $2\pi r = c$.

LANG Questa è la formula che volevo dimostrare!

RACHEL E infatti l'ha dimostrata.

LANG L'ho dimostrata. Allora, dov'è l'intimidazione?

RACHEL Non c'è più. (Detto con decisione).

LANG Non c'è più? Ah... Allora abbiamo vinto, la matematica ha vinto!

È vero?

RACHEL È vero.

(Serge alza la mano).

LANG Sì?

SERGE Quello però è un calcolo approssimato.

LANG No; al passo n -esimo è solo approssimato, ma al limite, che rappresenta ciò a cui si avvicinano i termini dell'uguaglianza, non è più approssimato.

SERGE Comunque, quel che voglio dire è che non raggiungerà mai il cerchio. Se dividiamo il cerchio per un dato numero, anche per un numero infinito...

LANG Non dividiamo per un numero infinito. Usiamo la parola «avvicinarsi». Sei d'accordo che l'area entro il poligono si avvicina all'area del disco?

SERGE Sì, ma non la raggiunge mai del tutto.

LANG No, non la raggiunge, ma ci si avvicina. Qualunque sia l'area del disco, la si approssima per mezzo dell'area del poligono di n lati.

SERGE Sì, ma non la raggiunge del tutto, non è esatta.

LANG Che cosa non è esatto? Proverò a ripetere i passaggi alla lavagna.

Ho l'area del cerchio, che so essere πr^2 . Ho l'area A_n del poligono di n lati. L'area A_n si avvicina all'area del cerchio. Non ho detto che sia esattamente uguale, ci si avvicina.

SERGE Dato che l'area del poligono non raggiunge mai l'area del cerchio, come può dire...

LANG Non capisco. Cosa significa «non raggiunge mai»?

SERGE L'area del poligono non diventa mai proprio l'area del cerchio.

LANG No, non lo diventa. È vero.

SERGE Ok, allora come può dire che la sua formula è esatta?

LANG Ah, l'area del poligono di n lati approssima l'area del cerchio. L'area del poligono di n lati è $(1/2) L_n b_n$. A quale numero si avvicina $(1/2) L_n b_n$?

SERGE A $(1/2) cr$.

LANG Giusto. Da una parte l'area del poligono di n lati si avvicina a πr^2 e dall'altra, quest'altro numero $(1/2) L_n b_n$, che è uguale a quell'area, si avvicina a $(1/2) cr$. Se ho un'espressione che si avvicina a due numeri, cioè questi numeri approssimano la stessa espressione, allora i due numeri debbono essere uguali.

SERGE Capisco quel che vuol dire.

LANG Quando scrivo

$$A_n = L_n b_n$$

ho un segno di uguale. Questo segno non è un'approssimazione. Questa è un'uguaglianza esatta. Va bene? A primo membro questo numero A_n si avvicina a πr^2 ; a secondo membro, questo stesso numero $(1/2)L_n b_n$ si avvicina a $(1/2)cr$. Abbiamo quindi due possibilità per approssimare lo stesso numero. Allora, le due possibilità debbono essere uguali. Capito? Questo risponde alla tua domanda?

SERGE Sì.

LANG Qualcun altro ha delle domande simili? Avete capito il ragionamento? (*Lang indica uno studente*).

LO STUDENTE Sì.

LANG Come ti chiami?

LO STUDENTE Mike.

LANG Vuoi ripetere il ragionamento, Mike?

MIKE Sì. Abbiamo un cerchio, e lo dividiamo. Il raggio è r . Lo dividiamo per n volte. Qui n sta per un numero qualsiasi. Poi, con quei piccoli..., quando lo dividiamo abbiamo dei piccoli triangoli, e l'area del triangolo è metà base per l'altezza. La base di quel triangolo sarebbe b_n , l'altezza sarebbe h_n , dunque l'area è $(1/2)b_n h_n$.

LANG Giusto.

MIKE Allora la moltiplico per n , che è il numero che avevo. E n volte b_n è la lunghezza, così ottengo L_n . Allora $(1/2)L_n b_n$ è $1/2$ per c per r ...

LANG Si avvicina, non «è».

MIKE Oh, sì, si avvicina. $1/2$ per c per r . E... Ok, πr^2 è uguale a $(1/2)cr$. Si elide una r da ambo i lati, poi si moltiplicano entrambi per 2, così $2\pi r$ è uguale a c .

LANG Bravo! Ce l'hai fatta! (*Alla classe*): Avete visto? Mike ha saputo ripetere l'intera dimostrazione, tutta insieme, l'intera successione di idee. Benissimo. Sei stato bravo.

Commento

La risposta degli studenti a questa lezione è stata particolarmente soddisfacente. Un'insegnante mi ha confidato in seguito di aver avuto dei timori per Rachel, quando ho incominciato la sequenza «convinzione-intimidazione», e di essersi chiesta se Rachel avrebbe retto allo sforzo. In realtà Rachel non solo ha retto benissimo (e non so se sia stato uno

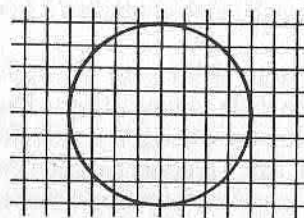
sforzo), ma ha progressivamente acquistato fiducia, e il tono delle sue risposte è cambiato da incerto che era a decisamente sicuro. Purtroppo il tono della voce non può essere riprodotto sulla pagina stampata.

Non mi impegnerei in questo tipo di procedimento con uno studente qualsiasi. Devo riuscire a stabilire rapidamente se lo studente troverà questo metodo troppo faticoso per lui, o, al contrario, raggiungerà con esso un nuovo livello di comprensione.

Il finale di Mike, che è stato capace di ripetere l'intera dimostrazione, è stato un vero successo.

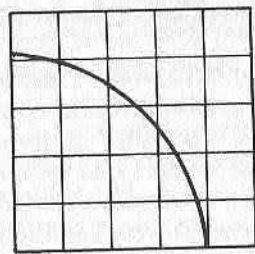
I programmi e l'insegnamento delle scuole elementare e secondaria dedicano, secondo me, eccessiva enfasi alle questioni tecniche, e peccano di incoerenza e di mancanza di respiro. L'argomento che ho scelto è di grande importanza ed è stato assai piacevole vedere in azione le rotelle del cervello di Mike e come il suo pensiero si rifletteva nell'espressione del volto, mentre ripeteva la dimostrazione. Doveva farlo completamente a parole, coordinare le frasi, e risolvere una quantità di problemi di organizzazione, scelta di vocaboli, sequenza di idee, il che ha dato piacere a lui, al resto della classe e a me.

A un livello più tecnico, l'approssimazione discussa nella prima parte della dimostrazione (riguardante il cambiamento dell'area per omotetia) dovrebbe essere spinta un po' oltre il punto ove sono arrivato io, ma non avevo il tempo di farlo, poiché desideravo trattare in modo completo la seconda parte della dimostrazione. Se avessi un'altra ora a mia disposizione, chiarirei meglio i motivi per i quali l'area cambia, seguendo il seguente schema. Consideriamo un reticolo formato da linee verticali e orizzontali:

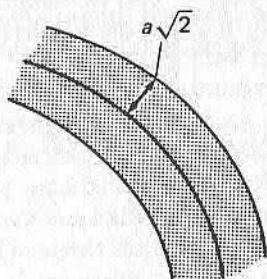


Per determinare l'area del disco in modo approssimato, potremmo contare tutti i quadrati che si trovano entro il cerchio, misurarne i lati, sommare le loro aree, e ottenere l'approssimazione desiderata. Ma noi vogliamo valutare quanto buona sia questa approssimazione. La differenza tra la somma delle aree di tutti i quadratini contenuti nel disco e l'area del disco stesso è determinata da tutte le piccole porzioni di quadrati che toccano il bordo del disco, cioè la circonferenza. Possiamo facilmente intuire che la somma di questi quadratini sarà molto piccola se

il reticolo è abbastanza fitto. Per valutare quanto piccola sia questa quantità, supponiamo di avere un reticolo tale che i quadrati abbiano lati di lunghezza a . Allora la diagonale di questi quadrati avrà una lunghezza $a\sqrt{2}$. Se un quadrato interseca il cerchio, allora un qualsiasi punto sul quadrato ha una distanza massima dal cerchio di $a\sqrt{2}$. Guardiamo la figura (a):



(a)



(b)

Infatti due punti qualsiasi del quadrato distano al più $a\sqrt{2}$. Disegniamo due strisce di ampiezza $a\sqrt{2}$ all'interno e all'esterno del cerchio come nella figura (b). Tutti i quadrati che intersecano il cerchio debbono stare entro queste strisce. È ragionevole porre che l'area delle due strisce sia al più uguale a:

$2a\sqrt{2}$ per la lunghezza del cerchio.

Così, se prendiamo a molto piccolo, cioè se consideriamo un reticolo molto fitto, allora l'area della banda è piccola, cioè al più $2a\sqrt{2}L$, dove L è la circonferenza del cerchio.

Abbiamo quindi ottenuto una valutazione dell'errore nell'approssimare l'area del cerchio (o disco) per mezzo della somma dei quadrati del reticolo che intersecano il cerchio. Questo errore tende a 0 se le dimensioni del reticolo si avvicinano a 0. Perciò, con il tendere a 0 delle dimensioni del reticolo, la somma delle aree dei quadrati del reticolo che stanno interamente entro il cerchio si avvicina all'area del disco.

Un ragionamento simile si applica a qualsiasi figura delimitata da una curva. In una conversazione successiva, verrà esposto un altro metodo per dedurre la lunghezza del cerchio $c = 2\pi r$ dall'area del disco $A = \pi r^2$, che è in qualche modo più semplice di quello scelto qui, e che si può generalizzare anche per trovare l'area della sfera.